泉州七中2020-2021学年度上学期高二年数学周练（十）

命题人：陈景文　黄婉真　20201128

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1.若ΔABC中，$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 C$，则此三角形的形状是（　　）

A．直角三角形　　B．等腰三角形　　C．等边三角形　　D．等腰直角三角形

2.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}$（$n\geq 2$，$n\in \mathbf{N}_+$），则$a_{2020}=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．-1　　D．2

3.过点$A(1,2)$的直线在两坐标轴上的截距之和为零，则该直线方程为（　　）

A．$y-x=1$　　B．$y+x=3$

C．$y=2x$或$x+y=3$　　D．$y=2x$或$y-x=1$

4.已知圆$C:(x-a)^2+y^2=4(a\geq 2)$与直线$x-y+2\sqrt{2}-2=0$相切，则圆C与直线$x-y-4=0$相交所得弦长为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

5.数列-1，3，-7，15，$\cdots$的一个通项公式可以是（　　）

A．$a_n=(-1)^n\cdot(2^n-1)$　　B．$a_n=(-1)^n\cdot(2n-1)$

C．$a_n=(-1)^{n+1}\cdot(2^n-1)$　　D．$a_n=(-1)^{n+1}\cdot(2n-1)$

6.若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n}{n^2+196}(n\in\mathbf{N}^*)$，则这个数列中的最大项是（　　）

A．第12项　　B．第13项　　C．第14项　　D．第15项

7.已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$右焦点为$F(3,0)$过点$F$的直线交$E$于$A,B$两点，若$AB$的中点坐标为$(1,\frac{1}{2})$，则$E$的离心率是（　　）

A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{13}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{14}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{4}$

8.已知直线$l:y=kx+m$与椭圆$C:\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$至多有一个公共点，则$z=\frac{\sqrt{10}}{2}k+m$的取值范围是（　　）

A．$[-2,2]$　　B．$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

C．$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　D．$(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$

二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分.）

9.若方程$\frac{x^2}{3-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$所表示的曲线为$C$，则下面四个说法中错误的是（　　）

A．若$1<t<3$，则C为椭圆　　B．若C为椭圆，且焦点在y轴上，则$2<t<3$

C．曲线C可能是圆　　D．若C为双曲线，则$t<1$

10. 将函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，

则下列结论中正确的是（　　）

A．$g\left(x\right)$ 的最小正周期为 π　　B．直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 是 $g\left(x\right)$ 图象的一条对称轴

C．$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$g\left(x\right)$ 为奇函数

11. 已知直线 l 过抛物线 $C:y^2=-2px(p>0)$ 的焦点，且与该抛物线交于 M,N 两点，若线段 MN 的长是 16，MN 的中点到 y 轴的距离是 6，O 是坐标原点，则（　　）

A．抛物线 C 的方程是 $y^2=-8x$　　B．抛物线的准线方程是 $y=2$

C．直线 l 的方程是 $x-y+2=0$　　D．$\triangle MON$ 的面积是 $8\sqrt{2}$

12. 对于数列 $\left\{a_n\right\}$，若存在数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $b_n=a_n-\dfrac{1}{a_n}$（$n\in\mathbf{N}^*$），则称数列 $\left\{b_n\right\}$ 是 $\left\{a_n\right\}$ 的“倒差数列”.

下列关于“倒差数列”描述正确的是（　　）

A．若数列 $\left\{a_n\right\}$ 是单增数列，但其“倒差数列”不一定是单增数列；

B．若 $a_n=3n-1$，则其“倒差数列”有最大值；

C．若 $a_n=3n-1$，则其“倒差数列”有最小值；

D．若 $a_n=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$，则其“倒差数列”有最大值.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左焦点为 $F_1\left(-2,0\right)$，点 $A\left(0,\sqrt{5}\right)$，点 P 为双曲线右支上的动点，且 ΔAPF_1 周长的最小值为 8，则双曲线的实轴长为________；离心率为________.

14. 直线 l 过抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点 $F\left(1,0\right)$，且与 C 交于 M,N 两点，

则 $p=$________；$\dfrac{\left|MF\right|}{9}-\dfrac{1}{\left|NF\right|}$ 的最小值是________.

15. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，1852 年英国来华传教伟烈亚力将《孙子算经》中“物不知数”问题的解法传至欧洲. 1874 年，英国数学家马西森指出此法符合 1801 年由高斯得出的关于同余式解法的一般性定理，因而西方称之为“中国剩余定理”.“中国剩余定理”讲的是一个关于整除的问题，现有这样一个整除问题：将正整数中能被 3 除余 2 且被 7 除余 2 的数按由小到大的顺序排成一列，构成数列 $\left\{a_n\right\}$，

则 $a_1=$________；$a_5=$________.

16. 已知 l 为空间中的一条直线，α 为空间中的一个平面，且 $l\perp\alpha$，垂足为点 O. 等腰直角三角形 ABC 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，$AB=2$，若 $A\in l,C\in\alpha$，则 OB 的最大值为________.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分．）

17．（本小题满分 10 分）已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和$S_n=\frac{1}{8}n^2+\frac{9}{8}n\ \ (n\in \mathbf{N}^*)$．

（Ⅰ）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（Ⅱ）令$b_n=\frac{1}{16(a_n-1)\cdot(a_{n+1}-1)}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和$T_n$．

18．（本小题满分 12 分）已知ΔABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c．

满足$b=2c$，$a\cos C+c\cos A=b\sin B$，

（Ⅰ）求角C；

（Ⅱ）若点D与点B在AC两侧，且满足$AD=1$，$CD=2$，求四边形$ABCD$面积的最大值．

19．（本小题满分 12 分）已知数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1$，前n项和$S_n=\frac{n+2}{3}a_n$．

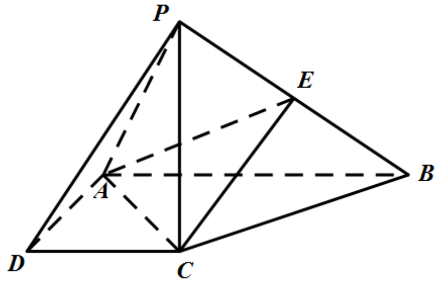
（Ⅰ）求a_2,a_3；

（Ⅱ）求$\left\{a_n\right\}$的通项公式.

20．（本小题满分 12 分）如图, 在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$是直角梯形，$AB\perp AD, AB//CD$，$PC\perp$底面$ABCD$，$AB=2AD=2CD=4, PC=2a$，E是PB的中点.

（Ⅰ）求证：平面$EAC\perp$平面PBC；

（Ⅱ）若二面角$P-AC-E$的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，求直线PA与平面EAC所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）已知抛物线$C: y^2=4x$的焦点为F，过点$P\left(2,0\right)$的直线交抛物线C于$A\left(x_1,y_1\right)$和$B\left(x_2,y_2\right)$两点.

（Ⅰ）当$x_1+x_2=4$时，求直线AB的方程；

（Ⅱ）若过点P且垂直于直线AB的直线l与抛物线C交于C,D两点，记$\triangle ABF$与$\triangle CDF$的面积分别为S_1,S_2，求S_1S_2的最小值.

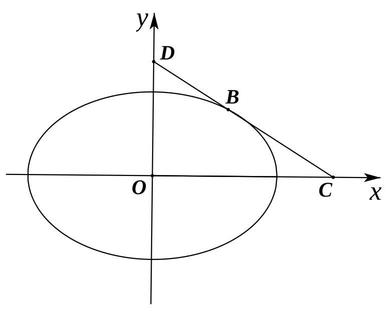
22.（本小题满分 12 分）已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$A(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，其焦距为$2$.

（Ⅰ）求椭圆C_1的方程；

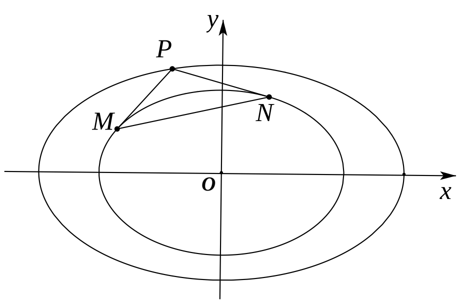
（Ⅱ）已知椭圆具有如下性质：若椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则椭圆在其上一点$A(x_0,y_0)$处的切线方程为$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，试运用该性质解决以下问题：

（i）如图（1），点B为C_1在第一象限中的任意一点，过B作C_1的切线l，l分别与x轴和y轴的正半轴交于C,D两点，求ΔOCD面积的最小值；

（ii）如图（2），过椭圆$C_2:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$上任意一点$P$作$C_1$的两条切线$PM$和$PN$，切点分别为$M,N$．当点$P$在椭圆$C_2$上运动时，是否存在定圆恒与直线$MN$相切？若存在，求出圆的方程；若不存在，请说明理由.



图（1）



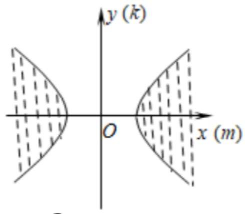
图（2）

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（十）参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1-4：AADD　5-8：ACCD

8.【解析】联立方程 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，化简整理得：$(5k^2+4)x^2+10kmx+5m^2-20=0$



$\Delta=(10km)^2-4(5k^2+4)(5m^2-20)\le 0$，即 $\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{5k^2}{4}\ge 1$，

即点 (m,k) 满足双曲线 $\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{5k^2}{4}=1$ 外部的点，即可行域，

如图所示，m 为 x 轴，k 为 y 轴，将 $z=\dfrac{\sqrt{10}}{2}k+m$ 变形为 $k=-\dfrac{2}{\sqrt{10}}m+\dfrac{2z}{\sqrt{10}}$，

平移直线 $k=-\dfrac{2}{\sqrt{10}}m$，由图可知，

当直线 $k=-\dfrac{2}{\sqrt{10}}m+\dfrac{2z}{\sqrt{10}}$ 与双曲线 $\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{5k^2}{4}=1$ 相切时为临界条件.

联立 $\begin{cases} k=-\dfrac{2}{\sqrt{10}}m+\dfrac{2z}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{m^2}{4}-\dfrac{5k^2}{4}=1 \end{cases}$，化简整理得：$m^2-4zm+2z^2-4=0$

由题知，$\Delta=(4z)^2-4(2z^2-4)=8z^2-16=0$，解得 $z=\pm\sqrt{2}$

若可行域是双曲线 $\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{5k^2}{4}=1$ 右支外部的点，即临界条件切线需要往上平移，即 $z\ge\sqrt{2}$；

若可行域是双曲线 $\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{5k^2}{4}=1$ 左支外部的点，即临界条件切线需要往下平移，即 $z\le-\sqrt{2}$；

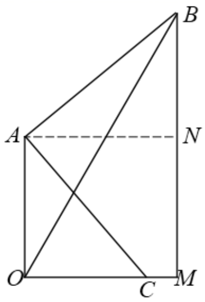
综上可知，$z=\dfrac{\sqrt{10}}{2}k+m$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right)$.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. AD　10. ACD　11. AD　12. ACD

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13. 2；2　14. 2；$-\dfrac{1}{3}$　15. 2；86　16. $1+\sqrt{5}$



16.【解析】作出等腰直角三角形 ABC 所在的平面的示意图，如下图所示，

过点 B 作 $BM\perp\alpha$ 于 M，过点 A 作 $AN\perp BM$ 于 N，连接 OB，

因为 $AB=AC,\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\angle BAN=\angle OAC$，

又 $\angle BNA=\angle AOC=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\triangle BAN\cong\triangle CAO$，

所以 $AO=AN,BN=OC$，设 $\angle ACO=\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $AO=2\sin\theta,CO=2\cos\theta$，所以 $AN=OM=2\sin\theta,BN=2\cos\theta$，

所以$OB^2=BM^2+OM^2=\left(2\sin\theta\right)^2+\left(2\cos\theta+2\sin\theta\right)^2=6+2\sqrt{5}\sin\left(2\theta-\beta\right)\left(\tan\beta=\dfrac{1}{2}\right)$，

因为$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},-\beta\le 2\theta-\beta\le\pi-\beta$，

所以，当$2\theta-\beta=\dfrac{\pi}{2}$时，$OB^2$取得最大值$6+2\sqrt{5}$，所以$OB$的最大值为$1+\sqrt{5}$，

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）由题意知，当$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{8}n^2+\dfrac{9}{8}n-\left[\dfrac{1}{8}\left(n-1\right)^2+\dfrac{9}{8}\left(n-1\right)\right]=\dfrac{1}{4}n+1$ ………… 3 分

当$n=1$时，$a_1=S_1=\dfrac{1}{4}+1$，符合上式. ……………… 4 分

所以$a_n=\dfrac{1}{4}n+1$. ……………… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知

$b_n=\dfrac{1}{16\left(a_n-1\right)\cdot\left(a_{n+1}-1\right)}=\dfrac{1}{16\left(\dfrac{n}{4}+1-1\right)\cdot\left(\dfrac{n+1}{4}+1-1\right)}=\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ………… 8 分，

$\therefore T_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$ ……………… 10 分

综上所述，$T_n=\dfrac{n}{n+1}$

18.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）因为$a\cos C+c\cos A=b\sin B$，所以$\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin^2 B$， ……………… 2 分

即$\sin(A+C)=\sin^2 B$，又$A+B+C=\pi$，所以$\sin B=1$，所以$B=\dfrac{\pi}{2}$. ……………… 4 分

因为$b=2c$，所以$\sin B=2\sin C$，得$\sin C=\dfrac{1}{2}$，所以$C=\dfrac{\pi}{6}$. ……………… 6 分

（Ⅱ）设$\angle ADC=\alpha$，由余弦定理，得$AC^2=5-4\cos\alpha$. ……………… 8 分

四边形$ABCD$的面积$S=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{2}\times AC\sin\dfrac{\pi}{6}\times AC\cos\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\times 1\times 2\sin\alpha$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{8}AC^2+\sin\alpha=\dfrac{5\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\sin\alpha$ ………………10 分

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}\sin(\alpha+\varphi)\le\dfrac{5\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}+4\sqrt{7}}{8}$（其中$\tan\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$），

故四边形$ABCD$面积的最大值为$\dfrac{5\sqrt{3}+4\sqrt{7}}{8}$. ……………… 12 分

19.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由$S_2=\dfrac{4}{3}a_2$，得$3\left(a_1+a_2\right)=4a_2$，解得$a_2=3a_1=3$ ……………… 2 分

由$S_3=\dfrac{4}{3}a_3$，得$3\left(a_1+a_2+a_3\right)=5a_3$，解得$a_3=\dfrac{3}{2}(a_1+a_2)=6$. ……………… 4 分

（Ⅱ）当$n>1$时，有$a_n=S_n-S_{n+1}=\dfrac{n+2}{3}a_n-\dfrac{n+1}{3}a_{n-1}$，整理得$a_n=\dfrac{n+1}{n-1}a_{n-1}$. ……………… 6 分

又 $a_1=1$，所以 $a_2=\frac{3}{1}a_1$， $a_3=\frac{4}{2}a_2$，

$\cdots$

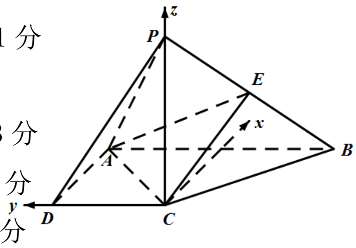
$a_{n-1}=\frac{n}{n-2}a_{n-2}$， $a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$， ……………… 8 分

将以上 n 个等式两端分别相乘，整理得 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$. ……………… 10 分

当 $n=1$ 时，满足上式. ……………… 11 分

综上，$\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$. ……………… 12 分

20.（本小题满分 12 分）



解：（Ⅰ）$\because PC\perp$ 平面 $ABCD, AC\subset$ 平面 $ABCD, \therefore AC\perp PC$ ……………… 1 分

因为 $AB=4, AD=CD=2$，所以 $AC=BC=\sqrt{2}$，

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$， ……………… 3 分

又 $BC\cap PC=C$，所以 $AC\perp$ 平面 PBC. ……………… 4 分

因为 $AC\subset$ 平面 EAC，所以平面 $EAC\perp$ 平面 PBC. ……………… 5 分

（Ⅱ）如图，以点 C 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CP}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0), A(2,2,0), B(2,-2,0)$. ……………… 6 分

设 $P(0,0,2a)(a>0)$，则 $E(1,-1,a)$

$\overrightarrow{CA}=(2,2,0),\overrightarrow{CP}=(0,0,2a),\overrightarrow{CE}=(1,-1,a)$，取 $\vec{m}=(1,-1,0)$，

则 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\vec{m}$ 为面 PAC 法向量. ……………… 8 分

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为面 EAC 的法向量，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，

即 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+az=0 \end{cases}$，取 $x=a, y=-a, z=-2$，则 $\vec{n}=(a,-a,-2)$……………… 10 分

依题意 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $a=2$.

于是 $\vec{n}=(2,-2,-2),\overrightarrow{PA}=(2,2,-4)$.

设直线 PA 与平面 EAC 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{PA},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

即直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$. ……………… 12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由直线 AB 过定点 $P(2,0)$，可设直线方程为 $x=my+2$. ……………… 1 分

联立 $\begin{cases} x=my+2 \\ y^2=4x \end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-4my-8=0$， ……………… 2 分

由韦达定理得 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-8$， ……………… 3 分

所以 $x_1+x_2=my_1+2+my_2+2=m(y_1+y_2)+4=m\cdot 4m+4=4m^2+4$.

因为 $x_1+x_2=4$. 所以 $4m^2+4=4$，解得 $m=0$. ……………… 4 分

所以直线 AB 的方程为 $x=2$. ……………… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），知$\triangle ABF$的面积为$S_1=S_{\triangle APF}+S_{\triangle BPF}=\frac{1}{2}|PF|\cdot|y_1|+\frac{1}{2}|PF|\cdot|y_2|=\frac{1}{2}\times1\times|y_1-y_2|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{(4m)^2-4\times(-8)}=\frac{1}{2}\sqrt{16m^2+32}=2\sqrt{m^2+2}$. …………… 8 分

因为直线CD与直线AB垂直, 且当$m=0$时, 直线AB的方程为$x=2$,

则此时直线l的方程为$y=0$, 但此时直线l与抛物线C没有两个交点, 所以不符合题意,

所以$m\neq0$. 因此, 直线CD的方程为$x=-\frac{1}{m}y+2$.

同理, $\triangle CDF$的面积$S_2=2\sqrt{\frac{1}{m^2}+2}$. …………… 10 分

所以$S_1S_2=4\sqrt{\left(2+\frac{1}{m^2}\right)(m^2+2)}=4\sqrt{5+2m^2+\frac{2}{m^2}}\geq4\sqrt{5+2\sqrt{2m^2\cdot\frac{2}{m^2}}}=4\sqrt{5+2\times2}=12$,

当且仅当$2m^2=\frac{2}{m^2}$, 即$m^2=1$, 亦即$m=\pm1$时等号成立. …………… 12 分

22.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）依题意得：椭圆的焦点为$F_1(-1,0),F_2(1,0)$，由椭圆定义知：$2a=|AF_1|+|AF_2|$

$\therefore a=\sqrt{2},c=1\therefore b=1$，所以椭圆$C_1$的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………… 3 分

（Ⅱ）（ⅰ）设$B(x_2,y_2)$，则椭圆C_1在点B处的切线方程为$\frac{x_2}{2}x+y_2y=1$

令$x=0$，$y_D=\frac{1}{y_2}$，令$y=0,x_C=\frac{2}{x_2}$，所以$S_{\Delta OCD}=\frac{1}{x_2y_2}$ …………… 4 分

又点B在椭圆的第一象限上，所以$x_2>0,y_2>0,\frac{x_2^{\ 2}}{2}+y_2^{\ 2}=1$

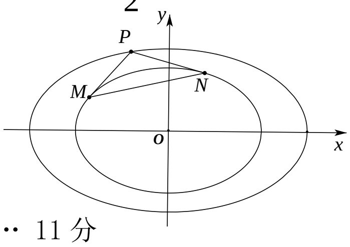
$\therefore1=\frac{x_2^{\ 2}}{2}+y_2^{\ 2}\geq2\sqrt{\frac{x_2^{\ 2}}{2}y_2^{\ 2}}=\sqrt{2}x_2y_2$ …………… 6 分

$\therefore S_{\Delta OCD}=\frac{1}{x_2y_2}\geq\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{x_2^{\ 2}}{2}=y_2^{\ 2}\Leftrightarrow x_2=\sqrt{2}y_2=1$

所以当$B(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$时，$\triangle OCD$的面积的最小值为$\sqrt{2}$ …………… 8 分

（ii）设$P(m,n)$，则椭圆C_1在点$M(x_3,y_3)$处的切线为：$\frac{x_3}{2}x+y_3y=1$

又PM过点$P(m,n)$，所以$\frac{x_3}{2}m+y_3n=1$，同理点$N(x_4,y_4)$也满足$\frac{x_4}{2}m+y_4n=1$，



所以M,N都在直线$\frac{x}{2}m+yn=1$上，

即：直线MN的方程为$\frac{m}{2}x+ny=1$ ……………10 分

所以原点O到直线MN的距离$d=\frac{1}{\sqrt{\frac{m^2}{4}+n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，……… 11 分

所以直线MN始终与圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$相切. …………… 12 分