泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（四）

命题人：曹东方　卢盛林　20200927

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知 $\vec{a}=(1,3)$ 是直线 l 的一个方向向量，点 $A(2,7)$ 和点 $B(-1,y)$ 均在直线 l 上，则 y 的值为（　　）

A. -9　　B. 10　　C. 4　　D. -2

2. 过点 $(-1,3)$ 且平行于直线 $x-2y+3=0$ 的直线方程为（　　）

A. $2x+y-1=0$　　B. $x-2y+7=0$

C. $x-2y-5=0$　　D. $2x+y-5=0$

3. 设 α 为锐角，若 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值为（　　）

A. $\frac{12}{25}$　　B. $\frac{24}{25}$　　C. $-\frac{24}{25}$　　D. $-\frac{12}{25}$

4. 过点 $(1,2)$ 且与原点距离最大的直线方程是（　　）

A. $x+2y-5=0$　　B. $2x+y-4=0$

C. $x+3y-7=0$　　D. $x-2y+3=0$

5. 直线 l 经过点 $A(1,2)$，在 x 轴上的截距的取值范围是 $(-3,3)$，则其斜率的取值范围是（　　）

A. $\left(-1,\frac{1}{5}\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$　　D. $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

6. 已知是 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$，夹角为 60° 的两个单位向量，则 $\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$ 与 $\vec{b}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2$ 的夹角是（　　）

A. 60°　　B. 120°　　C. 30°　　D. 90°

7. 若三条直线 $l_1:ax+y+1=0,l_2:x+ay+1=0,l_3:x+y+a=0$ 能构成三角形，则 a 应满足的条件是（　　）

A. $a=1$ 或 $a=-2$　　B. $a\neq\pm1$

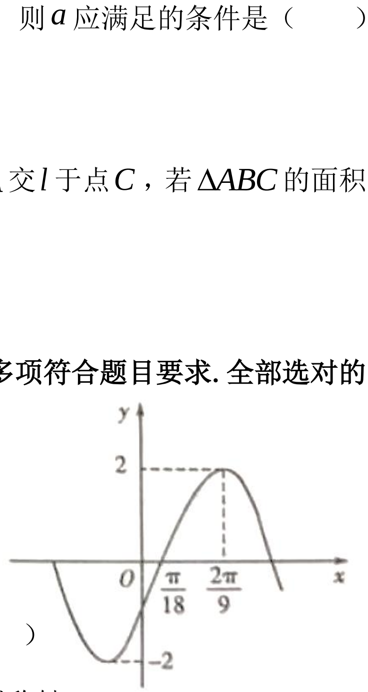
C. $a\neq1$ 且 $a\neq-2$　　D. $a\neq\pm1$ 且 $a\neq-2$

8. 已知点 $A(-2,1)$ 和点 B 关于直线 $l:x+y-1=0$ 对称，斜率为 k 的直线 m 过点 A 交 l 于点 C，若 ΔABC 的面积为 2，则 k 的值为（　　）

A. 3 或 $\frac{1}{3}$　　B. 0　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图，将函数 $f(x)$ 的图象所有点的横坐标伸长到原来的 $\frac{3}{2}$，再将所得函数图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列关于函数 $g(x)$ 的说法正确的是（　　）



A. 点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 是 $g(x)$ 图象的一个对称中心　　B. $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $g(x)$ 图象的一条对称轴

C. $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增　　D. 若 $|g(x_1)-g(x_2)|=4$，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

10. 已知圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线$l:(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$. 则以下几个命题正确的有（　　）

A. 直线l恒过定点$(1,3)$

B. 圆C被y轴截得的弦长为$4\sqrt{6}$

C. 直线l与圆C恒相交

D. 直线l被圆C截得最短弦长时，直线l的方程为$2x-y-5=0$

11. 已知点A是直线$l:x+y-\sqrt{2}=0$上一定点，点P,Q是圆$x^2+y^2=1$上的动点，若$\angle PAQ$的最大值为90°，则点A的坐标可以是（　　）

A. $\left(0,\sqrt{2}\right)$　　B. $\left(1,\sqrt{2}-1\right)$　　C. $\left(\sqrt{2},0\right)$　　D. $\left(\sqrt{2}-1,1\right)$

12. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别是内角A,B,C所对的边，$\sqrt{3}a=2c\sin A$，且$0<C<\dfrac{\pi}{2}$，$b=4$，则以下说法正确的是（　　）

A. $C=\dfrac{\pi}{3}$　　B. 若$\sin A=2\cos B\sin C$，则$\triangle ABC$是等边三角形

C. 若$c=\dfrac{7}{2}$，则$\cos B=\dfrac{1}{7}$　　D. 若$\triangle ABC$的面积是$2\sqrt{3}$，则该三角形外接圆半径为4

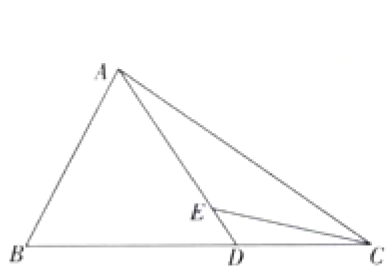
三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分，若有两空，则第一空2分，第二空3分.）

13. 无论λ取何值，直线$(\lambda+2)x-(\lambda-1)y+6\lambda+3=0$必过定点_________.

14. 圆心在直线$y=-4x$，且与直线$x+y-1=0$相切于点$P(3,-2)$的圆的标准方程为_________________.

15. 公元前3世纪，古希腊数学家阿波罗尼斯(*Apollonius*)在《平面轨迹》一书中，曾研究了众多的平面轨迹问题，其中有如下结论：平面内到两定点距离之比等于已知数的动点轨迹为直线或圆. 后世把这种圆称之为阿波罗尼斯圆. 已知平面直角坐标系中，$A(0,-1)$，$B(0,3)$，动点P满足$PA=\lambda PB(\lambda>0)$. 若点P的轨迹为一条直线，则$\lambda=$_______；若$\lambda=\dfrac{1}{2}$，则点P的轨迹方程为____________________.

16. 如图，在ΔABC中，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$，D为BC边上的点，E为AD上的点，且$AE=8$，$AC=4\sqrt{10}$，$\angle CED=\dfrac{\pi}{4}$，则$CE=$__________；若$CD=5$，则$\cos\angle DAB=$____________.



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）已知ΔABC中，角A,B,C所对边的长分别为a,b,c，且$a\cos B=\frac{1}{2}b+c$.

（Ⅰ）求角A的大小；

（Ⅱ）记ΔABC的外接圆半径为R，求$\frac{b^2+c^2+bc}{4R^2}$的值.

18.（本小题满分 12 分）已知直线l过点$(-2,1)$.

（Ⅰ）若直线l不经过第四象限，求直线l的斜率k的取值范围；

（Ⅱ）若直线l交x轴的负半轴于点A，交y轴的正半轴于点B，$\triangle AOB$的面积为S，其中O为坐标原点，求S的最小值，并求此时直线l的一般方程.

19.（本小题满分 12 分）函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+3\cos^2\omega x-\frac{1}{2}\left(\omega>0\right)$，且$f\left(x\right)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的解析式及函数$f(x)$的对称中心；

（Ⅱ）若$3\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}m[f(\frac{x}{8}-\frac{\pi}{12})-1]\geq m+2$对任意$x\in[0,2\pi]$恒成立，求实数$m$的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）在 ΔABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，向量 $\vec{m}=(\cos B,2\cos^2\frac{C}{2}-1)$，$\vec{n}=(c,b-2a)$ 且 $\vec{m}\perp\vec{n}$.

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）若点 D 为边 AB 上一点，且满足 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，$\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{7}$，$c=2\sqrt{3}$，求 ΔABC 的面积.

21.（本小题满分 12 分）已知曲线 $C:(1+a)x^2+(1+a)y^2-4x+8ay=0$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 a 取何值时，方程表示圆？

（Ⅱ）求证：不论 a 为何值，曲线 C 必过两定点.

（Ⅲ）当曲线 C 表示圆时，求圆面积最小时 a 的值.

22.（本小题满分 12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C_1:(x-4)^2+(y-5)^2=4$ 和圆 $C_2:(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

（Ⅰ）若直线 l_1 过点 $A(2,0)$，且与圆 C_1 相切，求直线 l_1 的方程；

（Ⅱ）若直线 l_2 过点 $B(4,0)$，且被圆 C_2 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l_2 的方程；

（Ⅲ）直线 l_3 的方程是 $x=\frac{5}{2}$，证明：直线 l_3 上存在点 P，满足过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_4 和 l_5，它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交，且直线 l_4 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_5 被圆 C_2 截得的弦长相等.

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学周练（四）参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1-4:DBBA　5-8:DBDB

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.）

9.BD　10.BCD　11.AC　12.AB

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，则第一空 2 分，第二空 3 分.）

13．$(-3,3)$　14．$(x-1)^2+(y+4)^2=8$　15．1；$x^2+y^2+\frac{14}{3}y-\frac{5}{3}=0$　16．$4\sqrt{2}$；$\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$

16.【解析】由题意可得 $\angle AEC=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，

在 ΔAEC 中，由余弦定理得 $AC^2=AE^2+CE^2-2AE\cdot CE\cdot\cos\angle AEC$，

即 $160=64+CE^2+8\sqrt{2}CE$，整理得 $CE^2+8\sqrt{2}CE-96=0$，解得 $CE=4\sqrt{2}$（负值舍去）；

$\because CD=5$，在 ΔCDE 中，由正弦定理得 $\frac{CE}{\sin\angle CDE}=\frac{CD}{\sin\angle CED}$，

即 $\frac{4\sqrt{2}}{\sin\angle CDE}=\frac{5}{\sin\frac{\pi}{4}}$，所以 $\sin\angle CDE=\frac{4}{5}$.

因为点 D 在 BC 边上，所以 $\angle CDE>\angle B=\frac{\pi}{3}$，而 $\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\angle CDE$ 只能为钝角，所以 $\cos\angle CDE=-\frac{3}{5}$，

$\therefore\cos\angle DAB=\cos\left(\angle CDE-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\angle CDE\cos\frac{\pi}{3}+\sin\angle CDE\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）由已知，得 $\sin A\cos B=\frac{1}{2}\sin B+\sin C$，又 $\sin C=\sin\left(A+B\right)$，

$\therefore\sin A\cos B=\frac{1}{2}\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，$\therefore\cos A\sin B+\frac{1}{2}\sin B=0$，

$\because 0<B<\pi$，则 $\sin B>0$，$\therefore\cos A=-\frac{1}{2}$，$\because 0<A<\pi$，因此，$A=\frac{2\pi}{3}$；

（Ⅱ）由余弦定理得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A=-bc$，

$\therefore\frac{b^2+c^2+bc}{4R^2}=\frac{a^2}{4R^2}=\sin^2 A=\sin^2\frac{2\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

18.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由题意知直线 l 的斜率存在.

当直线 l 的斜率 $k=0$ 时，直线的方程为 $y=1$，符合题意；

当$k\neq 0$时，直线l的方程为$y-1=k(x+2)$，

直线l在x轴上的截距为$-\dfrac{1+2k}{k}$，在y轴上的截距为$1+2k$，

要使直线l不经过第四象限，则有$\begin{cases}-\dfrac{1+2k}{k}<0,\\ 1+2k>0,\end{cases}$解得$k>0$.

综上，直线l的斜率k的取值范围为$[0,+\infty)$.

（Ⅱ）由题意可知直线l的斜率存在，故可设直线l的方程为$y-1=m(x+2)$，且易知$m\neq 0$，

由l的方程得$A\left(-\dfrac{1+2m}{m},0\right),B(0,1+2m)$.

依题意得$\begin{cases}-\dfrac{1+2m}{m}<0,\\ 1+2m>0,\end{cases}$得$m>0$.

又$S=\dfrac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|=\dfrac{1}{2}\cdot\left|-\dfrac{1+2m}{m}\right|\cdot|1+2m|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1+2m)^2}{m}$

$=\dfrac{1}{2}\left(4m+\dfrac{1}{m}+4\right)\geq\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{4m\cdot\dfrac{1}{m}}+4\right)=\dfrac{1}{2}(4+4)=4$

（当且仅当$2\sqrt{m}=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$，即$m=\dfrac{1}{2}$时等号成立），

所以当$m=\dfrac{1}{2}$时，S取得最小值，且$S_{\min}=4$，此时直线l的方程为$x-2y+4=0$.

19.（本小题满分12分）

解：（Ⅰ）由题得：$f(x)=\sqrt{3}\sin(2\omega x+\dfrac{\pi}{3})+1$，

又函数$f(x)$的周期为$\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{2\pi}{2\omega}=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\omega=2$，

所以$f(x)=\sqrt{3}\sin(4x+\dfrac{\pi}{3})+1$，令$4x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi,k\in Z$，故$x=\dfrac{k\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12},k\in Z$，

故对称中心为$(\dfrac{k\pi}{4}-\dfrac{\pi}{12},1)$ $k\in Z$.

（Ⅱ）（法一）$3\sin^2\dfrac{x}{2}-3m\sin\dfrac{x}{2}-m-2\geq 0$，设$\sin\dfrac{x}{2}\in[0,1]$，$m\leq\dfrac{3\sin^2\dfrac{x}{2}-2}{3\sin\dfrac{x}{2}+1}$，

设$t=3\sin\dfrac{x}{2}+1$，$t\in[1,4]$，则$\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{t-1}{3}$

$y=\dfrac{3\cdot\dfrac{1}{9}(t-1)^2-2}{t}=\dfrac{t^2-2t-5}{3t}=\dfrac{1}{3}(t-\dfrac{5}{t}-2)$在$t\in[1,4]$上是增函数

$\therefore t=1$时，$y_{\min}=-2$，$\therefore m\leq -2$

（法二）设$t=\sin\dfrac{x}{2},t\in[0,1]$，$y=3t^2-3mt-m-2\geq 0$

〈1〉$\frac{m}{2}<0$时，即$m<0$时，$y_{\min}=y(0)=-m-2\ge 0$，$\therefore m\le -2$

〈2〉$0\le\frac{m}{2}\le 1$时，即$0\le m\le 2$时，$y_{\min}=y(\frac{m}{2})=3\frac{m^2}{4}-3m\frac{m}{2}-m-2\ge 0$，无解

〈3〉$\frac{m}{2}>1$时，即$m>2$时，$y_{\min}=y(1)=3-3m-m-2\ge 0$，$m\le\frac{1}{4}$

综上：$m\le -2$

20.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由题可知：$\vec{m}\bullet\vec{n}=0$，则$c\cos B+\left(2\cos^2\frac{C}{2}-1\right)(b-2a)=0$即$c\cos B+\cos C(b-2a)=0$

则$\sin C\cos B+\cos C(\sin B-2\sin A)=0$化简可得：$\sin(B+C)=2\sin A\cos C$

所以$\sin A=2\sin A\cos C$，又$\sin A\ne 0$，所以$\cos C=\frac{1}{2}$，又$C\in(0,\pi)$

所以$C=\frac{\pi}{3}$

（Ⅱ）$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，可知点$D$是$AB$的中点　所以$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，

$\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}$　　因为$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{7}$，$C=\frac{\pi}{3}$

则$7=\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}ab\cos C$　　即$b^2+a^2+ab=28$ ①

由$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，又$c=2\sqrt{3}$所以化简可得$b^2+a^2-ab=12$ ②

①−②可得：$ab=8$

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）当$a=-1$时，方程为$x+2y=0$表示一条直线

当$a\ne -1$时，$\left(x-\frac{2}{1+a}\right)^2+\left(y+\frac{4a}{1+a}\right)^2=\frac{4+16a^2}{(1+a)^2}$

$\because\frac{4+16a^2}{(1+a)^2}>0$　　$\therefore a\ne -1$时方程表示圆

（Ⅱ）方程可变形为：$x^2+y^2-4x+a(x^2+y^2+8y)=0$

$\because a$取任何值，上式都成立

$\therefore\begin{cases}x^2+y^2-4x=0\\x^2+y^2+8y=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{16}{5}\\y=-\frac{8}{5}\end{cases}$

$\therefore$曲线C过定点$A(0,0)$，$B\left(\frac{16}{5},-\frac{8}{5}\right)$

即无论a为何值，曲线C必过两定点

（III）由（II）曲线 C 过定点 A,B，在这些圆中，以 AB 为直径的圆的面积最小

∵以 AB 为直径的圆的方程为：$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(y+\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{5}$ $\therefore\begin{cases}\frac{2}{1+a}=\frac{8}{5}\\ \frac{4a}{1+a}=\frac{4}{5}\\ \frac{4+16a^2}{(1+a)^2}=\frac{16}{5}\end{cases}$，解得：$a=\frac{1}{4}$

22.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）当直线 l_1 的斜率不存在时，直线 l_1 的方程为 $x=2$，符合题意.

当直线 l_1 的斜率存在时，设直线 l_1 的方程为 $y=k(x-2)$ 即 $kx-y-2k=0$.

由条件得 $\frac{|4k-5-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=\frac{21}{20}$，

所以直线 l_1 的方程为 $y=\frac{21}{20}(x-2)$，即 $21x-20y-42=0$.

综上，直线 l_1 的方程为 $x=2$ 或 $21x-20y-42=0$.

（Ⅱ）由题意知直线 l_2 的斜率存在，设直线 l_2 的方程为 $y=k(x-4)$，即 $kx-y-4k=0$.

由条件得，圆心 C_2 到直线 l_2 的距离 $d=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.

由点到直线的距离公式，得 $\frac{|-3k-1-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=0$ 或 $k=-\frac{7}{24}$，

所以直线 l_2 的方程为 $y=0$ 或 $y=-\frac{7}{24}(x-4)$，即 $y=0$ 或 $7x+24y-28=0$.

（III）由题意知，直线 l_4 和 l_5 的斜率存在，设直线 l_4 的斜率为 k，则直线 l_5 的斜率为 $-\frac{1}{k}$.

设点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},n\right)$，则 l_4 和 l_5 的方程分别为 $y-n=k\left(x-\frac{5}{2}\right)$ 和 $y-n=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{5}{2}\right)$，

即 $l_4: kx-y+n-\frac{5}{2}k=0$，$l_5:-\frac{1}{k}x-y+n+\frac{5}{2k}=0$.

根据直线 l_4 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_5 被圆 C_2 截得的弦长相等，两圆半径相等，

知圆心 C_1 到直线 l_4 的距离与圆心 C_2 到直线 l_5 的距离相等，

即 $\frac{\left|4k-5+n-\frac{5}{2}k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\left|\frac{3}{k}-1+n+\frac{5}{2k}\right|}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}}$，

化简得 $\left(\frac{5}{2}-n\right)k=\frac{21}{2}-n$ 或 $\left(\frac{1}{2}+n\right)k=-n-\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{2}+n\right)$.

因为关于 k 的方程有无穷多解，所以 $\frac{1}{2}+n=0$，即 $n=-\frac{1}{2}$，

即直线 l_3 上满足条件的点 P 是存在的，坐标 $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$.