

准考证号：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

(在此卷上答题无效)

保密★启用前

## 泉州七中 2020 届高三三年校质检（一）

### 理科数学

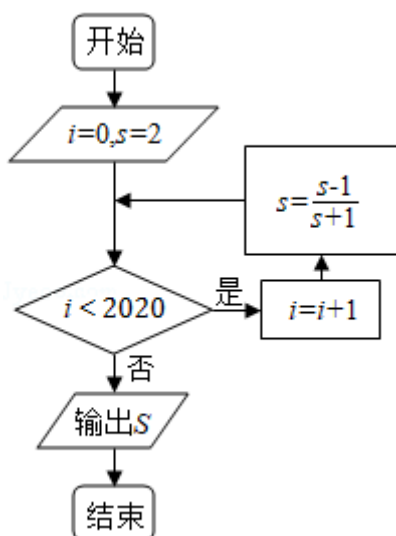
命题人：林志敏 黄永生 杜成北 审核人：汪木水 赖呈杰

本试卷共 23 题，满分 150 分，共 6 页。考试用时 120 分钟。

- 注意事项：**
1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
  2. 考生作答时，将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。
  3. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚。
  4. 保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损。考试结束后，请监考员将答题卡收回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $a \in \mathbf{R}$ ，复数  $z = (a^2 - 1) + (a - 1)i$  为纯虚数，则  $a =$   
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) -1 或 1
2. 已知集合  $A = \{x \mid \frac{x-1}{x} < 0\}$ ， $B = \{y \mid y = 2^x, x < 0\}$ ，则  
(A)  $A \subsetneq B$  (B)  $B \subsetneq A$  (C)  $A \cap B = \emptyset$  (D)  $A = B$
3. 如图所示的程序框图，则输出的  $s$  值为  
(A) 2 (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D) -3



4. 设  $\alpha, \beta$  为两个平面,  $l, m$  为两条直线, 且  $\alpha \perp \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = l$ , 下列命题

- ①  $m \perp \alpha$ , 则  $m // \beta$ ;                      ②  $m // \alpha$ , 则  $m \perp \beta$ ;  
 ③  $m \perp l$ , 则  $m \perp \beta$ ;                      ④  $m // l$ , 则  $m // \beta$ ;

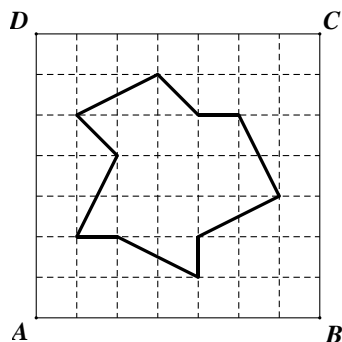
其中正确命题个数是 ( )

- (A) 3                      (B) 2                      (C) 1                      (D) 0

5. 一张方格纸上, 上面画着纵横两组平行线, 相邻平行线之间的距离都相等, 这样两组平行线的交点, 就是所谓格点. 一个多边形的顶点如果全是格点, 这多边形就叫做格点多边形. 有趣的是, 这种格点多边形的面积计算起来很方便, 只要数一下图形边线上的点的数目及图内的点的数目, 就可用公式算出. 这个公式是奥地利数学家皮克(Pick)在 1899 年给出的, 被称为“皮克定理”: 若格点多边形内部含有  $N$  个格点, 边界上含有  $L$  个格点, 则这个多边形的面积  $S = N + \frac{1}{2}L - 1$ . 如图,

正方形  $ABCD$  内有一格点多边形(粗实线). 在正方形  $ABCD$  内任取一点  $P$ , 则  $P$  落在格点多边形内的概率为

- (A)  $\frac{9}{49}$                       (B)  $\frac{2}{7}$                       (C)  $\frac{19}{49}$                       (D)  $\frac{33}{98}$



6. 若  $(1-2x)^{2020} = a_0 + a_1x + \dots + a_{2020}x^{2020}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 则  $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2020}}{2^{2020}}$  的值为

- (A) 2                      (B) 0                      (C) -1                      (D) -2

7. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 11$  且  $\frac{S_5}{5} - \frac{S_3}{3} = -2$ , 则满足  $S_n < 0$  的最小的  $n$  为

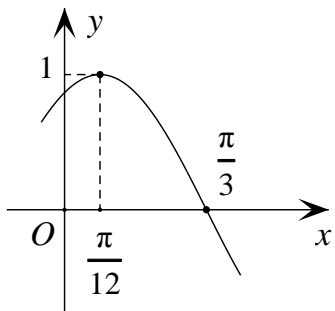
- (A) 7                      (B) 11                      (C) 12                      (D) 13

8. 设  $a = \frac{2}{\ln 2}$ ,  $b = \frac{3}{\ln 3}$ ,  $c = \frac{5}{\ln 5}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

- (A)  $c < b < a$                       (B)  $a < b < c$                       (C)  $b < a < c$                       (D)  $c < a < b$

9. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, A > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的图象如图所示, 若存在两个不相等的实数  $m, n \in (\pi, 2\pi)$  满足  $f(m) = f(n) = -\frac{1}{4}$ , 则  $f(\frac{3m+3n}{2}) =$

- (A)  $-\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{1}{2}$                       (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$                       (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



10. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) + f(-x) = 2\cos x$ , 且当  $x \geq 0$  时,  $f'(x) + \sin x \geq 0$ , 则不等式  $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos x$  的解集为
- (A)  $(-\infty, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty)$  (B)  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  (C)  $[\frac{\pi}{2}, +\infty)$  (D)  $(-\infty, \frac{\pi}{2}]$
11. 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  作一直线与  $C$  的右支交于点  $P, Q$ ,  $\angle F_1PQ = 90^\circ$ , 若  $\triangle F_1PQ$  的内切圆半径为  $b$ , 则双曲线  $C$  的离心率为
- (A)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (B)  $\sqrt{5}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D)  $\sqrt{2}$
12. 三棱锥  $A-BCD$  中,  $AB = CD = \sqrt{6}$ ,  $AC = BD = a$ ,  $AD = BC = b$ ,  $a + 2b = 6$ , 平面  $\alpha // AB$ , 平面  $\alpha // CD$ , 当三棱锥  $A-BCD$  在  $\alpha$  上的正投影的面积最大时, 其外接球的半径为
- (A)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$  (B)  $\sqrt{7}$  (C) 4 (D) 2

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。将答案填在答题卡的相应位置。

13. 工商部门对本市五个商场销售的某件商品一天的销售量及其价格进行调查。五个商场的售价  $x$  (元) 和销售量  $y$  (件) 之间的一组数据如下表：

$x$	9	9.5	10	10.5	11
$y$	11	10	8	6	5

通过分析, 发现销售量  $y$  对商品的价格  $x$  具有线性相关关系, 并且计算得回归直线  $y = bx + a$  中  $a = 40$ , 则  $b$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = 1$ ,  $a_n a_{n+1} = 2^n$ , 则  $a_{50} =$ \_\_\_\_\_.
15. 平面四边形  $ABCD$  中,  $AC \perp BD$ ,  $BD = 4$ , 则  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} =$ \_\_\_\_\_.
16. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点  $F$ , 准线与  $x$  轴交于点  $E$ , 过  $E$  的直线  $l$  与  $C$  交于点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (0 < y_1 < y_2)$ , 直线  $BF$  交  $y$  轴于点  $D(0, -1)$ , 则  $y_2 - 2y_1$  的最小值为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须做答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求做答。

(一) 必考题：共 60 分

17. (12 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，已知  $(2c - a)b = \frac{\sin B}{\sin C}(b^2 + c^2 - a^2)$ 。

(1) 求角  $B$ ；

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $6\sqrt{3}$ ， $3\sin A = 2\sin C$ ，且  $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$ ，求  $AD$ 。

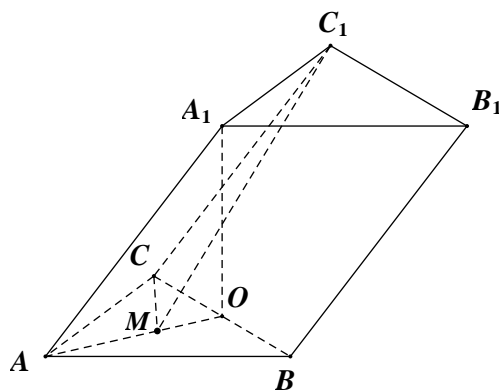
18. (12 分)

如图，在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中，底面为正三角形， $AB = 2$ ， $A_1$  在底面  $ABC$  的射影是  $BC$  的中点  $O$ 。

(1) 证明：平面  $A_1AO \perp$  平面  $BB_1C_1C$ ；

(2) 若直线  $A_1A$  和底面  $ABC$  所成的角为  $\frac{\pi}{4}$ ，问线段  $AO$  上是否存在一点  $M$ ，使得二面角

$B - CC_1 - M$  的大小为  $\frac{\pi}{4}$ ？若存在，计算  $OM$  的值；若不存在，请说明理由。



19. (12分)

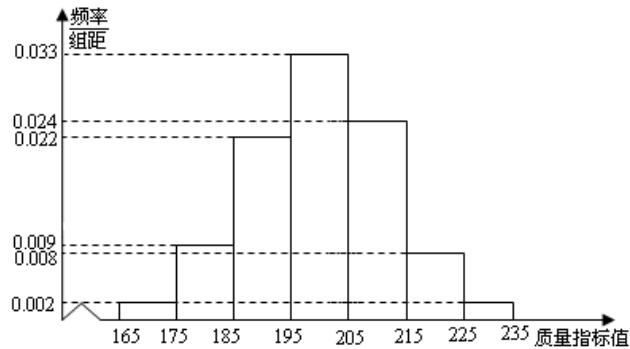
已知菱形  $ABCD$  的周长为16, 面积为8, 以  $AB$  所在直线为  $x$  轴,  $AB$  的中点为原点建立平面直角坐标系. 分别以  $A$ 、 $B$  为左、右焦点的椭圆  $E$  经过该菱形的中心.

(1) 求  $E$  的方程;

(2) 直线  $l$  与  $E$  有且仅有一个公共点  $M$ ,  $l$  与直线  $x=3$  交于点  $N$ , 求证:  $\triangle MNB$  为直角三角形.

20. (12分)

某企业为了检查电子元件的一条生产流水线的生产情况, 从该流水线上随机抽取500件产品作为样本, 并测量它们的一项质量指标值. 由测量结果得到如下的频率分布直方图:



(1) 从质量指标值位于  $(165, 175]$  与  $(225, 235]$  的电子元件中任取2件, 求这2件电子元件质量指标值之差不超过10的概率;

(2) 按照质量评价标准, 质量指标值位于  $(215, 235]$  的电子元件为不合格品. 检验员每天检验6次, 每次从该流水线上随机抽取10件产品进行检验, 每次检验只要发现不合格品数多于1件, 都对设备进行校准. 以  $X$  表示一天中校准设备的次数. 已知各检验结果相互独立, 试以频率为概率, 求  $E(X)$  (结果保留小数点后三位);

(3) 为保障电子元件的出厂质量, 企业拟对多批电子元件成品进行检验, 规则如下: 对于一批电子元件, 如果检查到第  $m$  ( $m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*$ ) 件仍未发现不合格品, 则认为该批产品合格; 如在尚未抽到第  $m$  件时已检查到不合格品, 则停止检验, 并认为这批产品不合格. 假设一批电子元件数量很大, 可认为每次检查到不合格品的概率为  $p$ , 则平均每批要检查多少件电子元件? (结果用  $m$ ,  $p$  表示)

附:  $0.9^9 \approx 0.3874$ ,  $0.9^{10} \approx 0.3487$ .

21. (12分)

已知函数  $f(x) = e^{x-1} - a \ln x + x^2 - 2$ ,  $g(x) = a(x-1)$  ( $a \in \mathbf{R}$ )

(1) 对任意的  $x > 0$ ,  $f(x) \geq 0$ , 求  $a$  的值;

(2) 用  $\min\{p, q\}$  表示  $p, q$  中的最小值. 设函数  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  ( $x > 0, a \neq 0$ ), 讨论  $h(x)$  零点的个数.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题做答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. 【选修 4—4: 坐标系与参数方程】(10分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$  ( $t$  为参数). 曲线  $C_1$  在变换  $\varphi: \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2} y \end{cases}$

作用下得到曲线  $C_2$ . 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线  $C_2$  的极坐标方程;

(2) 设  $P, Q$  为曲线  $C_2$  上的不同两点, 且  $OP \perp OQ$ , 证明:  $\frac{|PQ|}{|OP| \cdot |OQ|}$  为定值.

23. 【选修 4—5: 不等式选讲】(10分)

已知  $f(x) = x^2 - x - 3$ ,  $g(x) = k|x-1| + 1$ ,  $k > 0$ .

(1) 当  $k = 1$  时, 求不等式  $f(x) > g(x)$  的解集;

(2) 若  $g(x) + g(-x) \geq 8$ , 且正数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = k$ , 证明:  $f(a) + f(b) + f(c) + 9 \geq 0$ .