**一、三角函数图像及性质问题**

1、（2019·江苏高考模拟）已知函数，．

（1）求函数的单调增区间；

（2）求方程在(0，]内的所有解．

【详解】

 

（1）由,，解得：,.

∴函数的单调增区间为,

（2）由得，解得：，即,

∵，∴或．

2、（湖南省五市十校教研教改共同体2019届高三12月联考数学）已知向量，，，设函数.

（1）求函数的解析式及单调递增区间；

（2）设，，分别为内角，，的对边，若，，的面积为，求的值.

【解析】（1）.

令，，解得，；

所以函数的单调递増区间为，.

（2），

.

，

，

，即.

由得，

又，

**二、解三角形中的计算问题**

3、（2019·山东高考模拟（理））的内角，，的对边分别为，，，已知，，.

（1）求角；

（2）若点满足，求的长.

【详解】

（1）【解法一】由题设及正弦定理得，

又，

所以.

由于，则.

又因为，

所以.

【解法二】

由题设及余弦定理可得，

化简得.

因为，所以.

又因为，

所以.

（2）【解法1】由正弦定理易知，解得.

又因为，所以，即.

在中，因为，，所以，

所以在中，，，

由余弦定理得，

所以.

【解法2】

在中，因为，，所以，.

由余弦定理得.

因为，所以.

在中，，，

由余弦定理得

所以.

4、（2019·全国高三月考（理））如图，在中，，点

在 边上，且.

（Ⅰ）求的长；（Ⅱ）求的值.

 

试题解析：

（Ⅰ）在中，∵.∴  .

在中，由正弦定理得，即，解得.

（Ⅱ）∵，∴，解得，∴，在中，，在中，.

5、【五省创优名校2019-2020学年高三上学期全国I卷第二次联考】在 中，角 所对的边分别为 .已知 .

（1）若，求的周长；

（2）若为锐角三角形，求 的取值范围.

【解析】（1）因为，所以，

所以

因为，所以，所以

因为 ，且，所以，即，

则 的周长为

（2）因为 ，所以

则

因为为锐角三角形，所以，所以，

则 ，从而

故的取值范围是

**三、三角形面积和周长问题**

6、（2019年高考全国Ⅲ卷理数）△*ABC*的内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，已知．

（1）求*B*；

（2）若△*ABC*为锐角三角形，且*c*=1，求△*ABC*面积的取值范围．

【解析】（1）由题设及正弦定理得．

因为sin*A*0，所以．

由，可得，故．

因为，故，因此*B*=60°．

（2）由题设及（1）知△*ABC*的面积．

由正弦定理得．

由于△*ABC*为锐角三角形，故0°<*A*<90°，0°<*C*<90°，由（1）知*A*+*C*=120°，所以30°<*C*<90°，故，从而．

因此，△*ABC*面积的取值范围是．

7、已知在Δ*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，且.

（1）求角*B*的大小；

（2）若，求Δ*ABC*周长的最大值.

【解析】（1）由题意得，

所以，

因为，

所以，

所以.

（2）由已知及正、余弦定理得，

整理得，所以.

又由正弦定理得，

所以，

由得，

所以，且，

所以







.

∵，

∴，

∴，

∴，即，

8、（2017·河南郑州一中高考模拟（理））在中，内角对应的三边长分别为，且满足．

（Ⅰ）求角；

（Ⅱ）若，求的取值范围．

试题解析：（Ⅰ）∵，

∴，

∵，∴

∴

（Ⅱ）解法1：由正弦定理得，

∴．

∴



∵，∴，，

所以．

解法2：

∵，∴，

∵，

，即，∵，∴

9、（2019·山东高考模拟（理））在中，是边上的点，，.

（1）求的大小；

（2）若，求的面积.

（1）在中， ，

得

由，得

在中，由正弦定理得，

所以

（2）因为，是锐角，所以

设，在中，

即

化简得：

解得或（舍去）

则

由和互补，得

所以的面积

**四、三角形中线和角平分线问题**

10、（2019·天津高考模拟（理））的内角，，所对的边长分别为，，，且．

（Ⅰ）求角的大小；

（Ⅱ）若角，边上的中线的长为，求的面积．

解：（Ⅰ）∵，

∴．

即．

∴．

则，∴，因为0＜*A*＜π则．

（Ⅱ）由（1）知，所以*AC*＝*BC*，，

设*AC*＝*x*，在△*AMC*中由余弦定理得

即，解得，

故

11、（河北省衡水市衡水中学2019-2020学年高三上学期期中数学试题）已知△*ABC*的面积为，且且.

（1）求角*A*的大小；

（2）设*M*为*BC*的中点，且，∠*BAC*的平分线交*BC*于*N*，求线段*MN*的长度*.*

【解析】（1），

又，即，

∴，

又，∴.

（2）如下图所示：



在△*ABC*中，*AM*为中线，∴，

∴，

∴.

由（1）知：，

又，∴，，

由余弦定理可得：，

，

，

又，

∴，又，

∴，

∴.

12、在△中，内角，，的对边分别为，，，且，点在边上，平分．

（1）若，，求；

（2）若，求面积的最小值．

【解析】（1）由得，． 2分

所以，．

因为，所以，又因为，所以．所以，

由正弦定理得，，因此有．

（2）过点D作∥BC交AB于点E，因为BD平分，

所以．

由得，．因为，所以，即，所以．

由得，，故（当时取号）

所以△面积的最大值是．

四边形问题

13、已知四边形*OACB*中，*a*、*b*、*c*分别为的内角*A*、*B*、*C*所对的边长，且满足．



（1）证明：；

（2）若，设，，求四边形*OACB*面积的最大值．

【解析】（1）∵，

∴由正弦定理得，

∴，

∴，

∴，

由正弦定理得：．

（2）∵，，

∴，

∴为等边三角形．

由题意得

 



，

∵，

∴，

∴当，即时，有最大值，且最大值为．

14、如图，在四边形中，，，．

（1）若，求的面积；

（2）若，，求的长．

【解析】（1）因为，，，

所以，即，

解得，所以．

（2）设，，则，

在中，由正弦定理得：，故；

在中，，所以．

即，化简得：，

所以，所以，，

所以在中，．

即，解得或（舍）．

**五、三角函数与解三角形中的数学建模问题**

15【陕西省榆林市2019届高考模拟第一次测试】西北某省会城市计划新修一座城市运动公园,设计平面如图所示：其为五边形,其中三角形区域为球类活动场所；四边形为文艺活动场所,,为运动小道（不考虑宽度）,,千米.



（1）求小道的长度；

（2）求球类活动场所的面积最大值.

【解析】（1）在三角形中,千米,,

由余弦定理得：,

所以

∵,,∴

∵,∴

在中,（千米）

∴小道的长度为千米；



（2）如图所示,设,∵,

∴

在三角形中,由正弦定理可得：,

∴,,

∴

,

,

,

∵,∴,

故当时,取得最大值,最大值为.

∴球类活动场所的面积最大值为平方千米.

16、【江苏省常州市2019届高三上学期期末】某公园要设计如图所示的景观窗格（其结构可以看成矩形在四个角处对称地截去四个全等的三角形所得,如图二中所示多边形$ABCDEFGH$）,整体设计方案要求:内部井字形的两根水平横轴$AF=BE=1.6$米,两根竖轴$CH=DG=1.2$米,记景观窗格的外框（如图二实线部分,轴和边框的粗细忽略不计）总长度为$l$米.



（1）若$∠ABC=\frac{2π}{3}$,且两根横轴之间的距离为$0.6$米,求景观窗格的外框总长度；

（2）由于预算经费限制,景观窗格的外框总长度不超过$5$米,当景观窗格的面积（多边形$ABCDEFGH$的面积）最大时,给出此景观窗格的设计方案中$∠ABC$的大小与$BC$的长度.

【【解析】本题考查了解三角形的应用,体现了数学建模核心素养.

（1）$AB=EF=0.6$米,$∠CBE=∠ABC-90^{0}=30^{0}$,

则$BC=\frac{1.2-0.6}{2sin∠CBE}=0.6$米,$CD=BE-2⋅BCcos∠CBE=1.6-0.6\sqrt{3}$米,

故总长度$l=2AB+2CD+4BC=6.8-1.2\sqrt{3}$米；

答：景观窗格的外框总长度为$6.8-1.2\sqrt{3}$米；

（2）设$∠ABC=x,x\in \left(\frac{π}{2},π\right),BC=y$,景观窗格的面积为$S$,

则$AB=1.2-2ysin\left(x-\frac{π}{2}\right)=1.2+2ycosx,CD=1.6-2ycos\left(x-\frac{π}{2}\right)=1.6-2ysinx$

$⇒l=2AB+2CD+4BC=4y\left(1+cosx-sinx\right)+5.6\leq 5⇒sinx-cosx\geq \frac{3}{20y}+1$,

$⇒\frac{3}{20y}+1\leq \sqrt{2}sin\left(x-\frac{π}{4}\right)\leq \sqrt{2}⇒y\geq \frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)}{20}$,当且仅当$sin\left(x-\frac{π}{4}\right)=1$即$x=\frac{3π}{4}$时取等

$⇒1-sin2x\geq \left(\frac{3}{20y}+1\right)^{2}⇒sin2x\leq -\frac{9}{400y^{2}}-\frac{3}{10y}$,

$S=1.2×1.6-4×\frac{1}{2}⋅BCsin\left(π-x\right)⋅BCcos\left(π-x\right)=1.2×1.6+y^{2}sin2x\leq 1.2×1.6-\frac{9}{400}-\frac{3y}{10}$,

由$y\geq \frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)}{20}$知：$S\leq 1.2×1.6-\frac{9}{400}-\frac{9\left(\sqrt{2}+1\right)}{200}=\frac{741-18\sqrt{2}}{400}$,

答：当景观窗格的面积最大时,$∠ABC=\frac{3π}{4},BC$的长度为$\frac{3\left(\sqrt{2}+1\right)}{20}$米.