泉州七中 2021 届高三毕业班第三次月考试卷

数 学 答 案

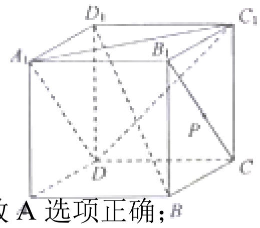
一、单项**选择题**：

题序	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	D	B	C	B	D

二、多项选择题：

题序	9	10	11	12
答案	BD	ABD	ABC	BD

三、填空题：



13. $\sqrt{2}$　　　　14. 14　　　　15. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　16. 64

部分选填详解

11. 注意到 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D，且平面 A_1C_1D // 平面 APC，所以 $BD_1\perp$ 平面 APC，故 A 选项正确；

注意到 B_1C // A_1D，所以 B_1C // 平面 A_1C_1D，故 B_1C 上的动点 P 到平面 A_1C_1D 的距离 d 处处相等，

故三棱锥 $P-A_1C_1D$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1C_1D}\cdot d_{p-A_1C_1D}$ 为定值，故 B 选项正确；

当 P 为 B_1（C）时，AP 与 A_1D 所成角的为 60°，故 C 选项正确；

设 C_1P 与平面 A_1C_1D 所成角 α，直线 C_1P 与直线 BD_1 的夹角为 β，则 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，

故可以先考虑 β 的大小，当 P 为 B_1C 中点时，β 取到最小；当 P 为线段 B_1C 端点时，β 取到最大；

故 $\cos\beta\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]$，所以 $\sin\alpha\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]$，又 $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，所以 α 不可能 60°.

12.【解答】解法一：设 $P(x_0,y_0),M\left(\dfrac{-c+2x_0}{3},\dfrac{2y_0}{3}\right)$，$\overrightarrow{F_2M}=\left(\dfrac{2x_0-4c}{3},\dfrac{2y_0}{3}\right)$，

由题意得 $\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{OP}=0$，得 ${x_0}^2+{y_0}^2-2cx_0=0$，即 ${x_0}^2+{y_0}^2=2cx_0$，即 $\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=2\overrightarrow{OF_2}\cdot\overrightarrow{OP}$，故选项 C 不正确

从 ${x_0}^2+{y_0}^2-2cx_0=0$，故点 P 在 F_2 为圆心，半径为 c 的圆上，故 $|PF_2|=c$，

根据焦半径的性质，可得 $a-c<c<a$，所以椭圆的离心率 $e>\dfrac{1}{2}$，故选项 A 不正确；

由题意得 $F_2M\perp OP$，注意到 N 为 F_1M 的中点，O 为 F_1F_2 的中点，所以 $ON\perp OP$，

所以 NP 为直径的圆过原点，即 M 为圆心 MN 为半径的圆经过原点，

所以 $MN=MO$，$\triangle OMN$ 必为等腰三角形，故选项 B 正确；

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}={x_0}^2+{y_0}^2-c^2$，又 ${x_0}^2+{y_0}^2=2cx_0$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2cx_0-c^2$，因 $|PF_2|=c$，即 $a-ex_0=c$，

解得 $x_0=\dfrac{a^2}{c}-a$，得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2c\left(\dfrac{a^2}{c}-a\right)-c^2=2a^2-2ac-c^2$.故选项 D 正确.

解法二：由 $\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{OP}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\overrightarrow{OP}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OF_1}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\overrightarrow{OP}=0$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OP}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\overrightarrow{OP}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\overrightarrow{OP}=0$，故 $\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=2\cdot\overrightarrow{OF_2}\cdot\overrightarrow{OP}$，故选项 C 不正确

由 $\left(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\overrightarrow{OP}=0$，思考可知，取点 G，$\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OF_2}$，

上面分析得，$OP\perp PG$，所以 F_2 为直角三角形 OPG 斜边的中点，

所以$|F_2P|=c$，

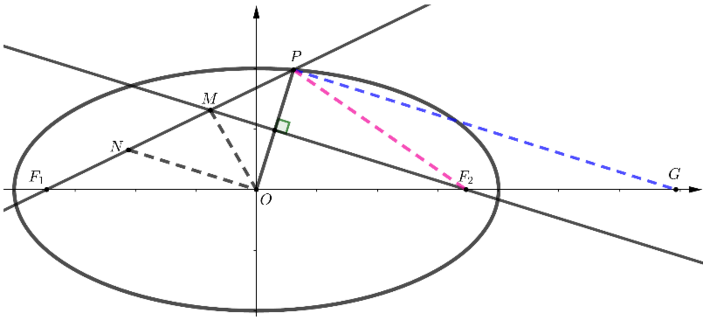
所以根据焦半径的性质，

可得$a-c<c<a$，

所以椭圆的离心率$e>\frac{1}{2}$，

故选项 A 不正确；

注意到$\frac{|F_1O|}{|F_1G|}=\frac{|F_1N|}{|F_1P|}$，所以$ON//PG$，



所以$ON\perp OP$，

所以直角三角形OPN斜边中点为M，所以$MN=MO$，$\triangle OMN$必为等腰三角形，故选项 B 正确；

根据平行四边形性质（四边平方和等于对角线平方和）可得$|OP|^2+|OF_1|^2=\frac{1}{2}\left(|PF_1|^2+|PF_2|^2\right)$，

注意到$|PF_2|=c$，所以$|PF_1|=2a-c$，代入得$|OP|^2=\frac{1}{2}\left(c^2+(2a-c)^2\right)-c^2=2a^2-2ac$，

根据极化恒等式$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|OP|^2-|OF_1|^2=2a^2-2ac-c^2$，故选项 D 正确.

16.【解答】解法一：假设长方体的上表面的对角线长为$2a$，长方体高为h，则根据圆锥轴截面可得$\frac{a}{6}=\frac{6-h}{6}$，

故可得$a+h=6$，设长方体的长和宽为x,y，则$x^2+y^2=4a^2$，

长方体的体积为$V=xyh\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}\cdot h=2a^2h=a\cdot a\cdot 2h\leqslant\left(\frac{a+a+2h}{3}\right)^3=64$

当且仅当长方体的上、下底面为正方形，且长宽高分别为高为$4\sqrt{2},4\sqrt{2},2$时取得体积最大.

解法二：先从该圆锥切割出最大体积的圆柱（圆柱一个底面落在圆锥体的底面内），

设圆柱的底面半径r，高为h，故可得$r+h=6$，圆柱的体积$V=\pi r^2h=\frac{\pi}{2}(r\cdot r\cdot 2h)\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\frac{r+r+2h}{3}\right)^3=32\pi$，

又圆柱与其所切割的最大长方体的体积比为$\pi:2$，所以从该圆柱切割出最大体积的长方体的体积是 64.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

所以$\frac{a_n+n}{2a_n+n+1+n-1}=\frac{a_n+n}{2a_n+2n}=\frac{1}{2}$，…………3 分

又$a_1+1=2$，所以$\{a_n+n\}$是等比数列，首项为2，公比为$\frac{1}{2}$.…………4 分

所以$a_n+n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以$a_n=2^{2-n}-n$.…………5 分

（2）$S_n=\left(2^1-1\right)+\left(2^0-2\right)+\ldots+\left(2^{2-n}-n\right)=\left(2+1+\frac{1}{2}+\ldots+2^{2-n}\right)-(1+2+3+\ldots+n)$，…………7 分

解得$S_n=\frac{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n(n+1)}{2}$，…………9 分

$S_n=4-\frac{4}{2^n}-\frac{n(n+1)}{2}=4-\frac{4}{2^n}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$.…………10 分

18.解：（1）根据余弦定理得$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，…………1 分

由题意 $2b^2 = bc\cos A(1-\tan A)$，

又 $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$，故 $b = c(\cos A - \sin A)$， ………………………………………………………… 2 分

由正弦定理得，$\sin B = \sin C(\cos A - \sin A)$， ……………………………………………………… 3 分

又在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B = \sin(A+C)$， ……………………………………………………………… 4 分

故 $\sin(A+C) = \sin C(\cos A - \sin A)$，展开整理得 $\sin A\cos C = -\sin C\sin A$， ………………… 5 分

因为 $\sin A > 0$，则 $\cos C = -\sin C$，即 $\tan C = -1$，因为 $0 < C < \pi$，所以 $C = \dfrac{3\pi}{4}$． ………… 6 分

（2）若选择条件①，则由题意得 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin C$， ……………………………………… 7 分

可得 $ab = 8\sqrt{2}$， …………………………………………………………………………………… 8 分

根据余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$， ………………………………………………………… 9 分

得 $a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = 40$，即 $a^2 + b^2 = 24$， ………………………………………………… 10 分

故得 $a^2 + b^2 - 2ab = 24 - 16\sqrt{2} = \left(4 - 2\sqrt{2}\right)^2$，即 $|b-a| = 4 - 2\sqrt{2}$，

注意到 $A < B$，所以 $a < b$，故 $b - a = 4 - 2\sqrt{2}$； ……………………………………………… 11 分

且 $a^2 + b^2 + 2ab = 24 + 16\sqrt{2} = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)^2$，

即 $a + b = 4 + 2\sqrt{2}$，解得 $a = 2\sqrt{2}$．……………………………………………………………… 12 分

若选择条件②，

解法一：由 $\cos B = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，得 $\sin B = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，因为 $B \in (0,\pi)$，所以 $\sin B = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$， ……………… 7 分

根据正弦定理得 $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$，求得 $b = 4$， ………………………………………………… 8 分

$\sin(B+C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$， ……………………………………………… 9 分

又 $\sin A = \sin(B+C) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$， ………………………………………………………………… 10 分

根据正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A}$，解得 $a = 2\sqrt{2}$． ………………………………………………… 12 分

解法二：由 $\cos B = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，得 $\sin B = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，因为 $B \in (0,\pi)$，所以 $\sin B = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$， ……………… 7 分

根据正弦定理得 $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$，求得 $b = 4$， ………………………………………………… 8 分

根据余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$， …………………………………………………………… 9 分

即 $a^2 - 8\sqrt{2}a + 24 = 0$，即 $\left(a - 2\sqrt{2}\right)\left(a - 6\sqrt{2}\right) = 0$，解得 $a = 2\sqrt{2}$ 或 $a = 6\sqrt{2}$， ………… 10 分

因为 $C = \dfrac{3\pi}{4}$，故 $c > a$，故 $a = 6\sqrt{2}$ 不符合题意， …………………………………………… 11 分

所以$a=2\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：（1）由频率分布直方图得，

M 含量数据落在区间$(1.00,1.2]$上的频率为$0.25\times0.2=0.05$， ……………………………… 2 分

故出现血症的比例为 5%，符合“安全的”条件；

由直方图得平均数为$\bar{x}=0.3\times0.2+0.5\times0.3+0.7\times0.3+0.9\times0.15+1.1\times0.05$， ………………… 4 分

求得$\bar{x}=0.61$，即志愿者的 M 含量的平均数为$0.61\%<0.65\%$， ……………………………… 5 分

综上，该疫苗在 M 含量指标上是“安全的”. ……………………………………………… 6 分

（2）依题意得，抽取的 200 名志愿者中女性志愿者应为 100 人， …………………………… 7 分

由已知，100 名女性志愿者被检测出阳性恰有 1 人，99 人阴性，

由（1）知 200 名志愿者中，阳性的频率为0.05，所以阳性的人数共有$200\times0.05=10$人，

因此男性志愿者被检测出阳性的人数是$10-1=9$. ……………………………………………… 8 分

所以完成表格如下：

	男	女
阳性	9	1
阴性	91	99

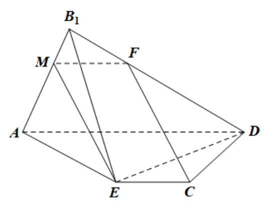
……………………………………………………………………………………………… 9 分

由2×2列联表可$K^2=\dfrac{200(9\times99-1\times91)^2}{100\times100\times10\times190}\approx6.74$， ………………………………11 分

由参考表格，可得$6.74>6.635$，

故超过 99%的把握认为，注射疫苗后，高铁血红蛋白血症与性别有关. ……………………… 12 分

20．解法一：（1）依题意得，在矩形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=3$，$BE=2EC$，



所以$AD=3,EC=1$.

在线段B_1A上取一点M，满足$AM=2MB_1$，

又因为$DF=2FB_1$，所以$\dfrac{B_1M}{MA}=\dfrac{B_1F}{FD}$， ……………………………………1 分

故$FM\parallel AD$，又因为$EC\parallel AD$，所以$EC\parallel FM$， ………………………………… 2 分

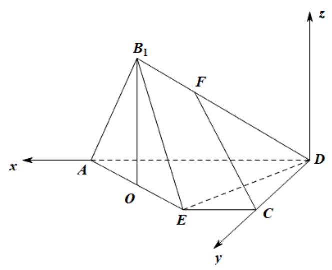
因为$FM=\dfrac{1}{3}AD=1$，所以$EC=FM$， ……………………………………………………… 3 分

所以四边形$FMEC$为平行四边形，所以$CF\parallel EM$， ……………………………………… 4 分

又因为$CF\not\subset$平面B_1AE，$EM\subset$平面B_1AE，

所以$CF\parallel$平面B_1AE. ………………………………………………………………………… 5 分

（2）设B_1到平面$AECD$的距离为h，$V_{B_1-AED}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle AED}\cdot h$，又$S_{\triangle AED}=3$，



所以$V_{B_1-AED}=h$，故要使三棱锥B_1-AED的体积取到最大值，须且仅需h取到最大值.

取AE的中点O，连结B_1O，依题意得$B_1O\perp AE$，则$h\leqslant B_1O=\sqrt{2}$，

因为平面$B_1AE\cap$平面$AECD=AE$，$B_1O\perp AE$，$B_1O\subset$平面B_1AE，

故当平面$B_1AE\perp$平面$AECD$时，$B_1O\perp$平面$AECD$，$h=B_1O$.

即当且仅当平面$B_1AE\perp$平面$AECD$时，V_{B_1-AED}取得最大值，此时

$h=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………………… 6 分

如图，以D为坐标原点，$\overline{DA}$，$\overline{DC}$的方向分别为x轴，y轴的正方向建立空间直角坐标系$D-xyz$，

得 $D(0,0,0)$， $E(1,2,0)$， $B_1(2,1,\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{DB_1}=(2,1,\sqrt{2})$， $\overrightarrow{DE}=(1,2,0)$， ………………………………………………………………7 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 B_1ED 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ ……………………………………………………………………………………………8 分

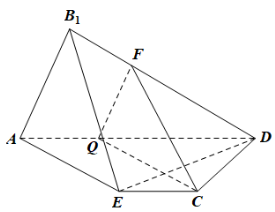
得 $\begin{cases}2x+y+\sqrt{2}z=0,\\ x+2y=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，解得 $\boldsymbol{n}=\left(-2,1,\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$， ……………………………………………………9 分

又因为平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$， ………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{4+1+\frac{9}{2}}}=\dfrac{3\sqrt{19}}{19}$， ……………………………………………………11 分

因为 B_1-DE-C 为钝角，所以其余弦值等于 $-\dfrac{3\sqrt{19}}{19}$.…………………………………………… 12 分

解法二：（1）依题意，在线段 AD 上取一点 Q，使得 $DQ=\dfrac{2}{3}DA$，



因为 $DF=2FB_1$，所以 $\dfrac{DQ}{DA}=\dfrac{DF}{DB_1}$，

所以 $FQ\parallel B_1A$， …………………………………………………………………… 1 分

因为 $FQ\not\subset$ 平面 B_1AE， $B_1A\subset$ 平面 B_1AE， 所以 $FQ\parallel$ 平面 B_1AE， …· 2 分

在矩形 $ABCD$ 中， $AD=BC$， $BE=2EC$， 所以 $EC=\dfrac{1}{3}BC=\dfrac{1}{3}AD=AQ$，

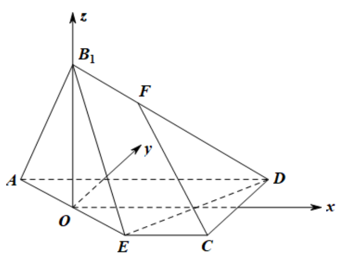
又 $AQ\parallel EC$， 所以四边形 $QAEC$ 为平行四边形，故 $QC\parallel AE$，

又因为 $CQ\not\subset$ 平面 B_1AE， $AE\subset$ 平面 B_1AE， 所以 $CQ\parallel$ 平面 B_1AE， ………………………3 分

又因为 $CQ\cap FQ=Q$， 所以平面 $QCF\parallel$ 平面 B_1AE， ………………………………………4 分

又因为 $CF\subset$ 平面 QCF， 所以 $CF\parallel$ 平面 B_1AE . ………………………………………………… 5 分

（2）设 B_1 到平面 $AECD$ 的距离为 h， $V_{B_1-AED}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle AED}\cdot h$， 又 $S_{\triangle AED}=3$，



所以 $V_{B_1-AED}=h$，故要使三棱锥 B_1-AED 的体积取到最大值，须且仅需 h 取到最大值.

取 AE 的中点 O， 连结 B_1O， 依题意得 $B_1O\perp AE$， 则 $h\leqslant B_1O=\sqrt{2}$，

因为平面 $B_1AE\cap$ 平面 $AECD=AE$， $B_1O\perp AE$， $B_1O\subset$ 平面 B_1AE，

故当平面 $B_1AE\perp$ 平面 $AECD$ 时， $B_1O\perp$ 平面 $AECD$， $h=B_1O$.

即当且仅当平面 $B_1AE\perp$ 平面 $AECD$ 时， V_{B_1-AED} 取得最大值， 此时 $h=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………6 分

如图，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{EC}$， $\overrightarrow{CD}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$，得 $B_1(0,0,\sqrt{2})$， $D(2,1,0)$， $E(1,-1,0)$，

所以 $\overrightarrow{EB_1}=(-1,1,\sqrt{2})$， $\overrightarrow{ED}=(1,2,0)$， ……………………………………………………………7 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 B_1ED 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\end{cases}$ ……………………………………………………………………………………………8 分

得$\begin{cases}-x+y+\sqrt{2}z=0,\\ x+2y=0,\end{cases}$令 $y=-1$，解得 $\boldsymbol{n}=\left(2,-1,\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$，…………………………………………………9 分

又因为平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，…………………………………………………………10 分

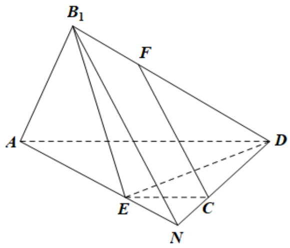
所以 $\cos\langle\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{4+1+\frac{9}{2}}}=\dfrac{3\sqrt{19}}{19}$，…………………………………………………………11 分

因为 B_1-DE-C 为钝角，所以其余弦值等于 $-\dfrac{3\sqrt{19}}{19}$.…………………………………………………… 12 分

解法三：（1） 延长 AE,DC 相交于点 N，在图 1 矩形 $ABCD$ 中，$BE=2EC$，所以 $\dfrac{DC}{DN}=\dfrac{2}{3}$，

……………………………………………………………………………………………………2 分

又因为 $DF=2FB_1$，所以 $\dfrac{DC}{DN}=\dfrac{DF}{DB_1}$，所以 $CF\parallel B_1N$，…4 分

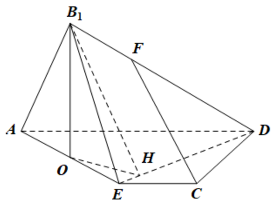


又因为 $CF\not\subset$ 平面 B_1AE，$B_1N\subset$ 平面 B_1AE，

所以 $CF\parallel$ 平面 B_1AE ………………………………………5 分

（2）设 B_1 到平面 $AECD$ 的距离为 h，$V_{B_1-AED}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle AED}\cdot h$，

又 $S_{\triangle AED}=3$，所以 $V_{B_1-AED}=h$，故要使三棱锥 B_1-AED 的体积取到最大值，须且仅需 h 取到最大值.



取 AE 的中点 O，连结 B_1O，依题意得 $B_1O\perp AE$，则 $h\leqslant B_1O=\sqrt{2}$，

因为平面 $B_1AE\cap$ 平面 $AECD=AE$，$B_1O\perp AE$，$B_1O\subset$ 平面 B_1AE，

故当平面 $B_1AE\perp$ 平面 $AECD$ 时，$B_1O\perp$ 平面 $AECD$，$h=B_1O$.

即当且仅当平面 $B_1AE\perp$ 平面 $AECD$ 时，V_{B_1-AED} 取得最大值，此时

$h=\sqrt{2}$.…………………………………………………………………………………………………6 分

过 O 作 $OH\perp DE$，垂足为 H，连接 B_1H，

因为 $B_1O\perp$ 平面 $AECD$，所以 $B_1O\perp DE$，…………………………………………………………… 7 分

又因为 $OH\perp DE$，$B_1O\cap OH=O$，所以 $DE\perp$ 平面 B_1OH，…………………………………… 8 分

所以 $B_1H\perp DE$，所以 $\angle B_1HO$ 为二面角 $A-DE-B_1$ 的平面角，

即 $\angle B_1HO$ 为二面角 B_1-DE-C 的平面角的补角. …………………………………………………9 分

设 A 到直线 DE 的距离 d，$S_{\triangle AED}=\dfrac{1}{2}DE\cdot d=\dfrac{1}{2}AD\cdot DC=3$，

又因为 $DE=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，得 $d=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$，所以 $OH=\dfrac{d}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，………………………………… 10 分

在 $\triangle B_1OH$ 中，$B_1O=\sqrt{2}$，$OH=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，且 $\angle B_1OH=90^\circ$，

所以 $B_1H^2=B_1O^2+OH^2=\dfrac{19}{5}$，所以 $\cos\angle B_1HO=\dfrac{OH}{B_1H}=\dfrac{3\sqrt{19}}{19}$，………………………………11 分

二面角 B_1-DE-C 的余弦值等于 $-\dfrac{3\sqrt{19}}{19}$ ……………………………………………………… 12 分

21．解：设 $A(x_1,y_1)$，$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，由题意得 $|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}$，……………………………………… 1 分

因为 $C:y^2=2px(p>0)$，所以 $x_0\geqslant 0$，…………………………………………………………… 2 分

所以 $|AF|\geqslant\dfrac{p}{2}$，当 A 为原点时 $|AF|$ 的最小值为 1，………………………………………………… 3 分

即 $p=2$，故 $C:y^2=4x$．…………………………………………………………………………4 分

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，l_{AB}：$x=my+1$，

由$\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1\end{cases}$，得$y^2-4my-4=0$，……………………………………………………5 分

所以$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，……………………………………………………………6 分

$|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(m^2+1)$，…………………7 分

$|OA||OB|=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}=\sqrt{{x_1}^2+4x_1}\sqrt{{x_2}^2+4x_2}$，……………………………8 分

即$|OA||OB|=\sqrt{x_1x_2}\sqrt{(x_1+4)(x_2+4)}=\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_1x_2+4(x_1+x_2)+16}$，

其中$x_1\cdot x_2=\dfrac{{y_1}^2{y_2}^2}{16}=1$，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$，

代入得$|OA||OB|=\sqrt{25+16m^2}$，………………………………………………………………9 分

所以$\frac{|AB|}{|OA|\cdot|OB|}=\frac{4(m^2+1)}{\sqrt{16m^2+25}}$，令$t=\sqrt{16m^2+25}\geq 5$，可得$m^2=\frac{t^2-25}{16}$，…………………10 分

所以$\dfrac{|AB|}{|OA|\cdot|OB|}=\dfrac{1}{4}\left(t-\dfrac{9}{t}\right)$，考察函数$g(t)=t-\dfrac{9}{t}$在$[5,+\infty)$单调递增，……………11 分

所以当$t=5$时即当$m=0$时，$g(t)$取到最小值，所以$\frac{|AB|}{|OA|\cdot|OB|}$的最小值为$\frac{4}{5}$．…………12 分

22．解：（1）由题意得l的斜率为1，…………………………………………………………1 分

$f(x)=\ln(x+1)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$，………………………………………………………………2 分

设切点为(x_0,y_0)，则$f'(x_0)=1$，即$x_0=0$，所以$y_0=f(x_0)=0$，故$l:y=x$.…………………3 分

（2）（i）由题意得，$a>0$，且$1+ax>0$，$g(x)$的定义域为$\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，

$g'(x)=(ax+1)'\cdot\dfrac{1}{ax+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{a}{ax+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$，…………………………………4 分

化简得$g'(x)=\dfrac{a(x+1)^2-2(ax+1)}{(ax+1)\cdot(x+1)^2}=\dfrac{ax^2+a-2}{(ax+1)\cdot(x+1)^2}$，

情况 1：当$a\geqslant 2$时，$g'(x)\geqslant 0$恒成立，故在$\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$内单调递增；…………………5 分

情况 2：当$a=1$时，$g(x)$定义域为$(-1,+\infty)$，$g'(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+1)\cdot(x+1)^2}=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$，

故$g(x)$在$(-1,1)$单调递减；在$(1,+\infty)$单调递增；…………………………………………6 分

情况 3：当$0<a<1$时，$g(x)$的定义域为$\left(-\dfrac{1}{a},-1\right)\cup(-1,+\infty)$，

令$g'(x)=0$得$x=\pm\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$，故$g(x)$在$\left(-\dfrac{1}{a},-\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}\right)$和$\left(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}},+\infty\right)$单调递增；

在$\left(-\sqrt{\frac{2-a}{a}},-1\right)$和$\left(-1,\sqrt{\frac{2-a}{a}}\right)$单调递减；…………………………………………………… 7 分

情况 4：$1<a<2$时，$g(x)$的定义域为$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$，令$g'(x)=0$，得$x=\pm\sqrt{\frac{2-a}{a}}$，

故$g(x)$在$\left(-\frac{1}{a},-\sqrt{\frac{2-a}{a}}\right)$和$\left(\sqrt{\frac{2-a}{a}},+\infty\right)$单调递增；在$\left(-\sqrt{\frac{2-a}{a}},\sqrt{\frac{2-a}{a}}\right)$单调递减. …· 8 分

（ii）由（i）知，当$0<a<1$或$1<a<2$时，

函数$g(x)$有两个极值点，记$x_1=-\sqrt{\frac{2-a}{a}},x_2=\sqrt{\frac{2-a}{a}}$，

故$g(x_1)+g(x_2)=\left[\ln(ax_1+1)+\ln(ax_1+1)\right]+\frac{2}{x_1+1}+\frac{2}{x_2+1}$

$$=\ln\left[a^2x_1x_2+a(x_1+x_2)+1\right]+\frac{2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}$$

注意到$x_1+x_2=0,x_1x_2=\frac{a-2}{a}$，

故$g(x_1)+g(x_2)=\ln(a^2-2a+1)+\frac{2a}{a-1}=\ln(a-1)^2+\frac{2a}{a-1}$， ……………………………… 9 分

当$0<a<1$时，$(a-1)^2\in(0,1)$，所以$\ln(a-1)^2<0$，又$\frac{2a}{a-1}<0$

所以$g(x_1)+g(x_2)=\ln(a-1)^2+\frac{2a}{a-1}<0$，不合题意，舍去. …………………………… 10 分

当$1<a<2$时，设$t=a-1\in(0,1)$，$\ln(a-1)^2+\frac{2a}{a-1}=2\ln t+2+\frac{2}{t}$

考查函数$G(t)=2\ln t+2+\frac{2}{t}$，$G'(t)=\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}=\frac{2(t-1)}{t^2}$，

故$G(t)$在$t\in(0,1)$单调递减，……………………………………………………………11 分

又$G\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2\mathrm{e}$，故$g(x_1)+g(x_2)>2\mathrm{e}$，即$0<t<\frac{1}{\mathrm{e}}$，解得$a\in\left(1,\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$. ……………… 12 分