**2016年泉州市高中学科竞赛**

**数学学科**

**（总分150分，考试时间：150分）**

**一、填空题：本大题共10小题，每小题6分，共60分．请将答案填写在答题卡的相应位置．**

1．已知，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

2．若，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

3．半径为2的球内接长方体的表面积的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

4．关于的不等式有且仅有2个整数解，则实数的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

5．若点在所在平面内，点在平面外．若对任意的实数，，则向量与所成的角 \_\_\_\_．

6．在空间直角坐标系中，棱长为2的正四面体的顶点分别在轴、轴上移动，则棱的中点到的距离的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

7．如图，三角形中，，，以为直角顶点向外作等腰直角三角形，当变化时，线段的长度最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

8．若，，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

9．若，，的最大值和最小值分别为，则\_\_\_\_\_\_．

10．函数的图象与轴交点坐标为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**二、解答题：本大题共4小题，共90分．请将答案填写在答题卡的相应位置．**

11．（本小题满分20分）

已知数列满足，()．

（Ⅰ）求数列的通项公式；

 （Ⅱ）设，数列的前项和为，证明：．

12．（本小题满分20分）

如图，锐角三角形中，，分别是的外心、垂心，直线分别交，于，．

（Ⅰ）求证：四点共圆；

（Ⅱ）求证：．

13．（本小题满分25分）

已知椭圆的右焦点，点，轴，椭圆上的两动点关于原点对称，且的最小值为．

 （Ⅰ）求椭圆的方程；

 （Ⅱ）过作两条动直线分别交于和，弦的中点分别为．若直线的倾斜角互余，求证：直线过定点．

14．（本小题满分25分）

函数，．

（Ⅰ）判断函数的零点个数，并给出证明；

（Ⅱ）若为函数的零点，证明：对任意的，，

．

**2016年泉州市高中学科竞赛**

**数学学科**

**（总分150分，考试时间：150分）**

**一、填空题：本大题共10小题，每小题6分，共60分．请将答案填写在答题卡的相应位置．**

1．已知，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：由，得．

2．若，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：因为，所以，

即，解得．

3．半径为2的球内接长方体的表面积的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：设长方体的长、宽、高分别为，则依题意，得，

即，又该长方体的表面积为，

且，所以．

4．关于的不等式有且仅有2个整数解，则实数的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：根据和的图象关系，易知．

5．若点在所在平面内，点在平面外．若对任意的实数，，则向量与所成的角 \_\_\_\_．

解析：设，则，故平面，所以向量与所成的角为．

6．在空间直角坐标系中，棱长为2的正四面体的顶点分别在轴、轴上移动，则棱的中点到的距离的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：记中点为，则，恒成立，

而，故．

7．如图，三角形中，，，以为直角顶点向外作等腰直角三角形，当变化时，线段的长度最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：设∠ABC=，∠ACB=，则，

由正弦定理可得，

所以，

，

故时，取得最大值．

8．若，，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：

 ，故的最小值为4．

9．若，，的最大值和最小值分别为，则\_\_\_\_\_\_．

解析：方法1：记，

则表示过，的直线斜率，为射线上的动点，为圆上的动点，由图可知的最大值和最小值分别为过点作圆的切线斜率，设过点的圆的切线方程，则，即(\*），

则方程（\*）的两根为，故．

方法2：记，

，且，

故．

10．函数的图象与轴交点坐标为．

解析：，

令，则可知是奇函数，且在上单调递增，所以在上单调递增.令得即，故，解得，故函数的图象与轴的交点坐标为．

**二、解答题：本大题共4小题，共90分．请将答案填写在答题卡的相应位置．**

11．（本小题满分20分）

已知数列满足，()．

（Ⅰ）求数列的通项公式；

 （Ⅱ）设，数列的前项和为，证明：．

解析：（Ⅰ）由，得，故是首项为3，公差为1的等差数列，所以，故．

（Ⅱ）由，得，

所以

．

又因为是单调递减数列，

所以，所以．

12．（本小题满分20分）

如图，锐角三角形中，，分别是的外心、垂心，直线分别交，于，．

（Ⅰ）求证：四点共圆；

（Ⅱ）求证：．

证明：（Ⅰ）连结，，，．

因为，

又，

所以四点共圆．

（Ⅱ），

又因为，所以，

 所以，故，即．

13．（本小题满分25分）

已知椭圆的右焦点，点，轴，椭圆上的两动点关于原点对称，且的最小值为．

 （Ⅰ）求椭圆的方程；

 （Ⅱ）过作两条动直线分别交于和，弦的中点分别为．若直线的倾斜角互余，求证：直线过定点．

解析：（Ⅰ）由已知，，设，则有，

得，

所以，所求椭圆的方程为．

（Ⅱ）**证法一：**因为直线的倾斜角互余，所以直线的斜率满足．联立方程组消去，

得，

所以，

把代入，**（或由点差法，）**

得，

因为，所以把中的替换为，

得，

，

所以直线的方程为

，

化简可得，直线过定点．

**证法二：**先猜后证，利用两种极端情形，猜出定点：

1. 时，此时直线为过点的方程；

1. 当时，此时，此时直线的方程为，

联立方程组解得即交点，下证三点共线．

又，，

所以，故直线*MN*经过定点．

14．（本小题满分25分）

函数，．

（Ⅰ）判断函数的零点个数，并给出证明；

（Ⅱ）若为函数的零点，证明：对任意的，，

．

解析：（Ⅰ）令，则可换元为，

记，函数与函数的零点相同．

任取，在内单调递增，故．

假设，则，

即，故在内单调递增．

，，，故函数在内有且仅有一个零点，

即函数在内有且仅有一个零点，易得在内有且仅有一个零点．

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，

令．

欲证，即证，

只需证：，即证．

而．

设，则，

故在区间单调递减．

所以，当时，取最大值，即．

故原不等式恒成立．