**2016年泉州市高中学科竞赛**

**数学学科**

**（总分150分，考试时间：150分）**

**一、填空题：本大题共10小题，每小题6分，共60分．请将答案填写在答题卡的相应位置．**

1．已知，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



2．若，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



3．半径为2的球内接长方体的表面积的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

4．关于的不等式有且仅有2个整数解，则实数的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



5．若点在所在平面内，点在平面外．若对任意的实数，，则向量与所成的角 \_\_\_\_．



6．在空间直角坐标系中，棱长为2的正四面体的顶点分别在轴、轴上移动，则棱的中点到的距离的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



7．如图，三角形中，，，以为直角顶点向外作等腰直角三角形，当变化时，线段的长度最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



8．若，，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



9．若，，的最大值和最小值分别为，则\_\_\_\_\_\_．



10．函数的图象与轴交点坐标为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



**二、解答题：本大题共4小题，共90分．请将答案填写在答题卡的相应位置．**

11．（本小题满分20分）

已知数列满足，()．



（Ⅰ）求数列的通项公式；



（Ⅱ）设，数列的前项和为，证明：．



12．（本小题满分20分）

如图，锐角三角形中，，分别是的外心、垂心，直线分别交，于，．



（Ⅰ）求证：四点共圆；



（Ⅱ）求证：．



13．（本小题满分25分）

已知椭圆的右焦点，点，轴，椭圆上的两动点关于原点对称，且的最小值为．



（Ⅰ）求椭圆的方程；



（Ⅱ）过作两条动直线分别交于和，弦的中点分别为．若直线的倾斜角互余，求证：直线过定点．



14．（本小题满分25分）

函数，．



（Ⅰ）判断函数的零点个数，并给出证明；



（Ⅱ）若为函数的零点，证明：对任意的，，



．



**2016年泉州市高中学科竞赛**

**数学学科**

**（总分150分，考试时间：150分）**

**一、填空题：本大题共10小题，每小题6分，共60分．请将答案填写在答题卡的相应位置．**

1．已知，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



解析：由，得．



2．若，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



解析：因为，所以，



即，解得．



3．半径为2的球内接长方体的表面积的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：设长方体的长、宽、高分别为，则依题意，得，



即，又该长方体的表面积为，



且，所以．



4．关于的不等式有且仅有2个整数解，则实数的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



解析：根据和的图象关系，易知．



5．若点在所在平面内，点在平面外．若对任意的实数，，则向量与所成的角 \_\_\_\_．



解析：设，则，故平面，所以向量与所成的角为．



6．在空间直角坐标系中，棱长为2的正四面体的顶点分别在轴、轴上移动，则棱的中点到的距离的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



解析：记中点为，则，恒成立，



而，故．



7．如图，三角形中，，，以为直角顶点向外作等腰直角三角形，当变化时，线段的长度最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



解析：设∠ABC=，∠ACB=，则，



由正弦定理可得，



所以，



，



故时，取得最大值．



8．若，，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



解析：



，故的最小值为4．



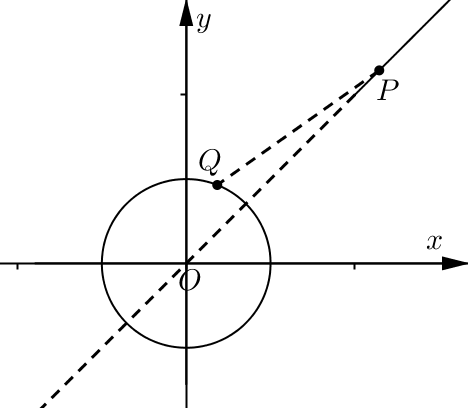
9．若，，的最大值和最小值分别为，则\_\_\_\_\_\_．



解析：方法1：记，



则表示过，的直线斜率，为射线上的动点，为圆上的动点，由图可知的最大值和最小值分别为过点作圆的切线斜率，设过点的圆的切线方程，则，即(\*），



则方程（\*）的两根为，故．



方法2：记，



，且，



故．



10．函数的图象与轴交点坐标为．



解析：，



令，则可知是奇函数，且在上单调递增，所以在上单调递增.令得即，故，解得，故函数的图象与轴的交点坐标为．



**二、解答题：本大题共4小题，共90分．请将答案填写在答题卡的相应位置．**

11．（本小题满分20分）

已知数列满足，()．



（Ⅰ）求数列的通项公式；



（Ⅱ）设，数列的前项和为，证明：．



解析：（Ⅰ）由，得，故是首项为3，公差为1的等差数列，所以，故．



（Ⅱ）由，得，



所以



．



又因为是单调递减数列，



所以，所以．



12．（本小题满分20分）



如图，锐角三角形中，，分别是的外心、垂心，直线分别交，于，．



（Ⅰ）求证：四点共圆；



（Ⅱ）求证：．



证明：（Ⅰ）连结，，，．



因为，



又，



所以四点共圆．



（Ⅱ），



又因为，所以，



所以，故，即．



13．（本小题满分25分）

已知椭圆的右焦点，点，轴，椭圆上的两动点关于原点对称，且的最小值为．



（Ⅰ）求椭圆的方程；



（Ⅱ）过作两条动直线分别交于和，弦的中点分别为．若直线的倾斜角互余，求证：直线过定点．



解析：（Ⅰ）由已知，，设，则有，



得，



所以，所求椭圆的方程为．



（Ⅱ）**证法一：**因为直线的倾斜角互余，所以直线的斜率满足．联立方程组消去，



得，



所以，



把代入，**（或由点差法，）**



得，



因为，所以把中的替换为，



得，



，



所以直线的方程为



，



化简可得，直线过定点．



**证法二：**先猜后证，利用两种极端情形，猜出定点：

1. 时，此时直线为过点的方程；



1. 当时，此时，此时直线的方程为，



联立方程组解得即交点，下证三点共线．



又，，



所以，故直线*MN*经过定点．



14．（本小题满分25分）

函数，．



（Ⅰ）判断函数的零点个数，并给出证明；



（Ⅱ）若为函数的零点，证明：对任意的，，



．



解析：（Ⅰ）令，则可换元为，



记，函数与函数的零点相同．



任取，在内单调递增，故．



假设，则，



即，故在内单调递增．



，，，故函数在内有且仅有一个零点，



即函数在内有且仅有一个零点，易得在内有且仅有一个零点．



（Ⅱ）由（Ⅰ）得，



令．



欲证，即证，



只需证：，即证．



而．



设，则，



故在区间单调递减．



所以，当时，取最大值，即．



故原不等式恒成立．