对应的点到原点的距离,是复数差的模的特殊情况.

师:是的!复数的模与复数差的模本质上是一致的.好,哪位同学来总结一下本节课的学习内容?

生 15:主要学习了复数的几何意义,一是用复平面内的点表示复数;二是复数的模就是复数所对应点到原点的距离;三是复数差的模表示两个复数所对应两点间的距离.

师:对!本节课的学习,运用了哪些思想方法?

生 15:主要运用了由特殊到一般的归纳思想,根据实数与点的关系、实数绝对值的意义、实数差的绝对值的意义,探究发现复数的相关几何意义,当然还涉及到一些其他的思想方法,如转化思想(复数问题转化为向量问题),以及数形结合思想等.(留白 5 分钟,学生总结、反思,下课)

四、两点反思

笔者根据上述"复数的几何意义"的教学设计上课,课堂上学生思维活跃,自感效果不错,有两点思考,与读者分享.

1. 加强探究教学,促进学生理解

数学课堂教学,首要问题是学生的理解,无论是概念、公式、定理,还是思想方法,必须得理解,否则只能生搬硬套,无法灵活运用.怎样才能促进学生的理解呢?笔者认为要合理设计问题,引导学生自主探究,学生通过探究获取新知,他们的理解才会更深刻,运用才能更灵活.就如本文,教师的主要任务是问题引导,学生主要是分析问题,若干结论几乎都是由学生自己发现的,特别是问题 4,学生在未知复数差的几何意义下,研究不等式 $|z-1+i|\leqslant 1$ 的含义,他们发现复数差的模,联想到实数差的绝对值,得出新结论,是本节课问题设计的亮点.

2. 注重知识生成的方法教学

常有人讲"授人以鱼,不如授人以渔",意思是教给学生方法比教给学生知识更重要(见文[2]),笔者非常认同这一点,首先,一些数学知识学生不可能终身记忆,而学生学习的一些数学思想方法却能终身受益,借用这些思维方法、方式可能会更合理地解决生活中的问题;其次,要想真正地获取数学知识并长久不遗忘,靠死记硬背是不行的,只有学生掌握了获取知识的方法,对知识的理解才能更深刻,记忆才会更长久,即使偶尔遗忘,也有可能通过一定的方法重新演绎还原,正所谓:有"渔"才有"鱼".本文的教学案例,不仅是让学生获得复数的几何意义,更让学生学会了由特殊到一般的归纳手段.

参考文献

[1]单 墫. 苏教版普通高中课程标准实验教科书(数学选修 2-2)[M]. 江苏教育出版社,2012.

[2]崔志荣. 关注知识生成的反馈教学[J]. 中小学数学,2015(1-2):43-45.

解 题 来 源 于 猜 想

——一道高考试题解法再探究

福建省泉州第七中学 (362000)　吴宝树　彭耿铃

2010 年课标全国卷理科第 21 题:

设函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$.(Ⅰ)若 $a=0$,求 $f(x)$ 的单调区间;(Ⅱ)若当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 0$,求 a 的取值范围.

解析:(Ⅰ)略;(Ⅱ)$f'(x)=e^x-1-2ax$,由(Ⅰ)知 $e^x\geqslant 1+x$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立.故 $f'(x)\geqslant x-2ax=(1-2a)x$,从而当 $1-2a\geqslant 0$,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$,而 $f(0)=0$,于是当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant 0$.由 $e^x>1+x(x\neq 0)$ 可得 $e^{-x}>1-x(x\neq 0)$.故当 $a>\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<e^x-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}(e^x-1)(e^x-2a)$,故当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时,$f'(x)<0$,而 $f(0)=0$,于是当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时,$f(x)<0$.综合得 a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$.

这是一道考察导数的创新好题,本题参考解答的难点在于"由 $e^x>1+x(x\neq 0)$ 可得 $e^{-x}>1-x(x\neq 0)$"进而得到"$f'(x)<e^x-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}(e^x-1)(e^x-2a)$",这一过程技巧性太强,不符

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

合通性通法,一般学生在解题过程中很难想到.处理这类问题通常还可以采用分离变量法求解:当$x=0$时,$a\in R$;当$x>0$时,$a\leqslant\frac{e^x-1-x}{x^2}(x>0)$,设$g(x)=\frac{e^x-1-x}{x^2}(x>0)$,用求导的办法求出$g(x)$的最小值.通过尝试,这种分离变量的方法无法达到目标.

那么有没有更显然,更适合学生理解的解法呢?再审视这个题目:"当$x\geqslant0$时$f(x)\geqslant0$"可以转化为:"当$x\geqslant0$时$f(x)_{\min}\geqslant0$",观察发现$f(0)=0$,据此可猜测问题等价于:"当$x\geqslant0$时$f(x)_{\min}\geqslant0=f(0)$",即$f(x)$应该在$[0,+\infty)$单调递增.所以$f'(x)=e^x-1-2ax\geqslant0$对$x\in[0,+\infty)$恒成立.同样地,观察得$f'(0)=0$,故$f'(x)$应该在$[0,+\infty)$单调递增,命$g(x)=f'(x)=e^x-1-2ax$,则$g'(x)=e^x-2a\geqslant0$对$x\in[0,+\infty)$恒成立,$\because g'(x)=e^x-2a$单调递增,$\therefore g'(x)_{\min}=g'(0)=1-2a\geqslant0$,解得$a\leqslant\frac{1}{2}$.有了这个猜想,我们只要证明:①当$a\leqslant\frac{1}{2}$时,$f(x)\geqslant0$对$x\in[0,+\infty)$恒成立;②当$a>\frac{1}{2}$时,$f(x)\geqslant0$对$x\in[0,+\infty)$不恒成立即可.

基于这一猜想,我们得到如下解析:由$f(x)=e^x-1-x-ax^2$,得$f'(x)=e^x-1-2a$,令$g(x)=f'(x)=e^x-1-2ax$,得$g'(x)=e^x-2a$.因为$x\in[0,+\infty)$,①当$a\leqslant\frac{1}{2}$时,$g'(x)=e^x-2a\geqslant0$恒成立,所以$g(x)=f'(x)=e^x-1-2ax$在$[0,+\infty)$单调递增,所以$f'(x)\geqslant f'(0)=0$,进一步得$f(x)$在$[0,+\infty)$单调递增,所以$f(x)\geqslant f(0)=0$对一切的$x\geqslant0$恒成立,即$a\leqslant\frac{1}{2}$符合题意;②当$a>\frac{1}{2}$时,由$g'(x)=e^x-2a=0$,可得$x=\ln(2a)$,当$x\in(0,\ln(2a))$时,$g'(x)=e^x-2a<0$,所以$g(x)=f'(x)=e^x-1-2ax$在$(0,\ln(2a))$单调递减,所以$f'(x)<f'(0)=0$,可得$f(x)$在$(0,\ln(2a))$单调递减,所以$f(x)<f(0)$,与$x\geqslant0$时$f(x)\geqslant0$矛盾,即$a>\frac{1}{2}$不符题意,舍去.综上所述,a的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{2}]$.

这样的解答显得自然而且通俗易懂.猜想在本解法中起了决定性作用,我们的解题思路正是基于这一猜想得到的.事实上,在解恒成立、存在性问题时,有时很难将参数分离出来,即或将参数分离出来,也很难将运算进行下去时,怎么办?这就需要基于合理的猜想,对参数进行预测,如本题一样.

著名数学家和数学教育家波利亚在他的著作《数学与猜想》中也指出了猜想对数学学习的重要性,他是这么描述的:"数学的创造过程是与其它知识的创造一样的,在证明一个定理之前,你先得猜测这个定理的内容,在你完全作出详细地证明之前,你先得猜测证明的思路.你要先把观察到的结果加以综合,然后加以类比,你得一次又一次地尝试.数学家的创造性成果是论证推理(演绎推理),即证明,但这个证明是通过合情推理,通过猜想而发现的.只要数学的学习过程稍反映出数学的发明过程的话,那么就应当让猜想、合情推理占有适当的位置".实际上,教师在平时就应该引导学生进行大胆猜想,是激发学生学习兴趣,探求知识的必要手段.在解题过程中,猜想有助于探求解题思路,发现结论.在数学学习中,经常会遇到具有探究价值的问题,若能及时捕捉,鼓励学生进行大胆的猜想、探究并加以拓展,将问题进行横向、纵向的联系,使学生的学习进入一个再创造的过程,定能起到事半功倍的效果.

在高考及各类质检考试中,这类先大胆猜想,再验证求解的解题思路比比皆是,认真梳理和总结,对形成有规律的解题思路和快速准确解题会有很大帮助的.以下列举一二.

(2010年大纲全国卷Ⅱ试题)设函数$f(x)=1-e^{-x}$.

(Ⅰ)证明:当$x>-1$时,$f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$;(Ⅱ)设当$x\geqslant0$时,$f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$,求$a$的取值范围.

解析:(Ⅰ)略;(Ⅱ)$x\in[0,+\infty)$时,$f(x)\geqslant0$,当$a<0$,易得当$x>-\frac{1}{a}$时,$\frac{x}{ax+1}<0$,与$f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$矛盾.当$a\geqslant0$时,$f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$等价于$(ax+1)f(x)-x\leqslant0$,记$g(x)=(ax+1)(1-e^{-x})-x$,即证当$x\in[0,+\infty)$时$g(x)\leqslant0$恒成立,由$g(0)=0$可猜测函数$g(x)$在$x\in[0,+\infty)$时单调递减,即$g'(x)=(ax+1-a)e^{-x}+a-1$在$x\in(0,+\infty)$时$g'(x)\leqslant0$,记$h(x)=(ax+1-a)e^{-x}+a-1$,$h'(x)=-(ax-2a+1)e^{-x}$,当$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$时,$h'(x)\leqslant0$,则$g'(x)=(ax+1-a)e^{-x}+a-1$在$x\in[0,+\infty)$单调递减,即$g'(x)\leqslant g'(0)=0$,$g(x)$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在 $x \in [0, +\infty)$ 时单调递减，可得 $g(x) \leqslant g(0) = 0$，所以 $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ 满足条件. 当 $a > \frac{1}{2}$ 时，显然 $x_0 = \frac{2a-1}{a} > 0$ 是函数 $h(x)$ 的极大值点，所以当 $x \in (0, x_0)$ 时，$0 < h(0) = h(x) < h(x_0)$，即当 $x \in (0, x_0)$ 时 $g(x)$ 单调递增，此时 $g(x) \geqslant g(0) = 0$，与 $x \in [0, +\infty)$ 时 $g(x) \leqslant 0$ 恒成立矛盾，所以当 $a > \frac{1}{2}$ 时不符合题意. 综上 $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(2015 北京高考题) 已知函数 $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

(Ⅰ) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(Ⅱ) 求证：当 $x \in (0,1)$ 时，$f(x) > 2(x + \frac{x^3}{3})$；

(Ⅲ) 设实数 k 使得 $f(x) > k(x + \frac{x^3}{3})$ 对 $x \in (0,1)$ 恒成立，求 k 的最大值.

解析：(Ⅰ)(Ⅱ) 略；(Ⅲ) 记 $F(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} - k(x + \frac{x^3}{3})$，即证当 $x \in (0,1)$ 时 $F(x) > 0$ 恒成立，观察得 $F(0) = 0$，据此可猜测当 $x \in (0,1)$ 时，$F(x)$ 单调递增. $F'(x) = \frac{kx^4 + 2 - k}{1 - x^2}$，当 $0 \leqslant k \leqslant 2$ 时，$F'(x) \geqslant 0$，此时 $F(x) > F(0) = 0$，所以 $0 \leqslant k \leqslant 2$ 满足条件. 当 $k > 2$ 时，由 $F'(x_0) = 0$，得 $x_0 = \sqrt[4]{\frac{k-2}{k}} \in (0,1)$，当 $x \in (0, x_0)$ 时，$F'(x) < 0$，所以函数 $F(x)$ 在 $x \in (0, x_0)$ 单调递减，$F(x_0) < F(x) < F(0) = 0$，与 $x \in (0,1)$ 时 $F(x) > 0$ 恒成立矛盾，所以当 $k > 2$ 时不符合题意. 综上，满足条件的 k 的最大值为 2.

对一次试卷讲评课的一点感悟

江西省南昌三中　(330008)　张金生

通常，试卷讲评课要力求精讲精析，抓住典型的错例，择其要点加以点拨，充分启发学生思考，对重要的解题思维和方法进行有效的归纳与训练. 在此基础上，还应鼓励学生开动脑筋，引导他们对典型试题进行反思与总结，通过归纳、类比、展开联想进行迁移或拓展，挖掘试题中的潜在性质，将进一步激发学生的学习兴趣，培养学生创新能力，提高试卷讲评课的效果.

在学校的一次月考中，解析几何解答题是 2014 年高考广东卷 20 题：

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；(2) 若动点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 外一点，且点 P 到椭圆的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.

在讲评完该题后，笔者提出问题："对于该题能否提出一般性的结论？请同学们思考，明天上课时就请同学来讲".

第二天，同学们非常踊跃，有一位同学上讲台主讲其他同学补充，得出一般结论并证明了：自圆 C'：$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上一点 P 向已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 引两条切线，则两条切线相互垂直.

这一同学的讲解和回答得到了师生给予肯定和赞扬.

我接着说："同学们，我们可以对圆 C' 给出一个名称，也即可以把圆 $C': x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 叫椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的大伴随圆". 同学们一听有点奇怪，怎么叫"大伴随圆"，难道还有"小伴随圆"？

在随后一周的周练试卷上我特意出了这样一道解析几何解答题：

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 F_1, F_2 分别为其左、右焦点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net