对一道高考试题的再探究

彭耿铃

(福建省泉州市第七中学，362000)

(2014年福建高考数学理科20题)已知函数 $f(x)=e^x-ax$(a 为常数)的图像与 y 轴交于点 A，曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为 -1.

(I) 求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值；

(II) 证明：当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$；

(III) 证明：对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $x^2<ce^x$.

下面对此题的解题思路进行分析.

探究一　(I) $\because f(x)=e^x-ax$，$\therefore f'(x)=e^x-a$. 又 $f'(0)=1-a=-1$，得 $a=2$. $\therefore f(x)=e^x-2x$，$f'(x)=e^x-2$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln2$. 当 $x<\ln2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\ln2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. $\therefore$ 当 $x=\ln2$ 时，$f(x)$ 取得极小值，且极小值为 $f(\ln2)=e^{\ln2}-2\ln2=2-\ln4$，$f(x)$ 无极大值.

(II) 令 $g(x)=e^x-x^2$，则 $g'(x)=e^x-2x$，由(I)得 $g'(x)=f(x)\geqslant f(\ln2)>0$，$\therefore g(x)$ 在 R 上单调递增，又 $g(0)=1>0$，故当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)>0$，即 $x^2<e^x$.

(III) 由(II)知：当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$，$\therefore e^x=e^{\frac{x}{2}}\times e^{\frac{x}{2}}>(\frac{x}{2})^2\times(\frac{x}{2})^2$，故取 $x_0=\frac{4}{\sqrt{c}}$，则当 $x>x_0$ 时，$e^x=e^{\frac{x}{2}}\times e^{\frac{x}{2}}>(\frac{x}{2})^2\times(\frac{x}{2})^2>\frac{4}{c}\times(\frac{x}{2})^2=\frac{1}{c}x^2$，因此，对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $x^2<ce^x$.

事实上，解题中(III)引入(II)的结论，是近年来高考创新型试题的一个显著特点，它有利于培养学生的即时应用能力与创新意识，这应在平时的学习过程中学生必须加以重视和应用！

探究二　(I) 与探究一同；

(II) 要证明：当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$ 等价证明：当 $x>0$ 时，$\frac{x^2}{e^x}<1$.

令 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}(x>0)$，

$\therefore$ 当 $0<x<2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x>2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$h(x)\leqslant[h(x)]_{\max}=h(2)=\frac{4}{e^2}<1$，$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$\frac{x^2}{e^x}<1$，即当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$.

(III) 对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $x^2<ce^x\Leftrightarrow$ 对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $\frac{x^2}{e^x}<c$. 由(II)可知：当 $0<x<2$ 时，$h(x)$ 单调递增；当 $x>2$ 时，$h(x)$ 单调递减，且 $h(x)\geqslant0$. 故可知：① 当 $c>\frac{4}{e^2}$ 时，$\because h(x)\leqslant[h(x)]_{\max}=h(2)=\frac{4}{e^2}$ 恒成立，$\therefore$ 存在 $x_0=0$ 使得命题成立；② 当 $c=\frac{4}{e^2}$ 时，$\because h(x)\leqslant\frac{4}{e^2}$ 在 $x\in(2,+\infty)$ 恒成立，$\therefore$ 存在 $x_0=2$ 使得命题成立；③ 当 $0<c<\frac{4}{e^2}$ 时，$\because h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递减且 $h(x)\in(0,\frac{4}{e^2})$，故必存在 $x_0\in(2,+\infty)$ 使得 $h(x_0)=c\in(0,\frac{4}{e^2})$，故当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $\frac{x^2}{e^x}<c$. $\therefore$ 存在 x_0 使得命题成立. 综上所述，命题成立.

探究三　(I) 与探究一同；

(II) 由高等数学中 e^x 的泰勒展开式 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$. 特别地，当 $x>0$ 时，前面四项 $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3>x^2$. $\therefore$ 当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$.

(III) 对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<ce^x\Leftrightarrow$ 对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $\frac{x^2}{c}<e^x$. 由(II)中 e^x 的泰勒展开式 $e^x=1+x+$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$ 可知 $e^x>\frac{1}{6}x^3$,取 $x_0=\frac{6}{c}$,故当 $x>x_0$ 时,有 $\frac{x^2}{c}<\frac{x^3}{6}<e^x$. 因此,对任意给定的正数 c,总存在 x_0,使得当 $x\in(x_0,+\infty)$,恒有 $x^2<ce^x$.

事实上,$x^2<ce^x\Leftrightarrow\frac{x^2}{e^x}<c$,而 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}$ 是一个"$\frac{\infty}{\infty}$"型无穷小量. 由高等数学知识可知无穷小量的极限定义为:$\forall c>0$,$\exists x_0$,使得当 $x>x_0$ 时有 $|h(x)|<c$ 恒成立. 这其实就是问题(III)的表述了.

参考文献:

[1] 庞新军. 对一道高考选择题的思考. 数学通讯(上半月),2010(1、2).

[2] 玉云化. 在深入研究问题中提升数学思维. 数学通讯(下半月),2010(1).

[3] 孔珊珊. 泰勒公式在数值计算中的应用. 济宁学院学报,2011(3).

(收稿日期:2014-11-16)

方程思想在一类最值问题中的应用

魏国兵

(江苏省南京市溧水区教育局教研室,211200)

一、试题

题1 (2011年浙江理科卷16题)设 x,y 为实数,若 $4x^2+y^2+xy=1$,则 $2x+y$ 的最大值是_____.

题2 (2014年辽宁理科卷16题)对于 $c>0$,当非零实数 a,b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$,且使 $|2a+b|$ 最大时,$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$ 的最小值为_____.

作为填空题的"压轴题",这两道试题的难度都比较大,很多同学束手无策,通常处理最值问题的方法(基本不等式、消元后转化为函数最值等)均"失效"了. 这两道问题的本质是一样的,都是以一个二元二次方程为条件,解决"线性函数"的最值(注:第2题中,可先将 c 视为常数,解决 $|2a+b|$ 取最值时的条件——a、b、c 的等量关系,然后利用消元思想,将 $\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$ 转化为一元函数,问题得到解决).

二、解析

当常规思路受阻时,我们可以联想到以往在学习线性规划时,处理线性二元函数的一种方法——数形结合. 我们可以将条件中的二元二次方程视为一条曲线,将"线性函数"视为一条斜率固定的动直线,则最值往往产生于直线与曲线"相切"等极端位置,从而转化为方程思想处理.

题1的解 设 $2x+y=t$,联立方程组得

$$\begin{cases}4x^2+y^2+xy=1,\\2x+y=t,\end{cases}$$

消去 y 得:$4x^2+(t-2x)^2+x(t-2x)=1$,整理得 $6x^2-3tx+t^2-1=0$.

由题意知,方程有解,则 $\Delta=9t^2-24(t^2-1)\geqslant0$,解得 $t^2\leqslant\frac{8}{5}$,即 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}\leqslant t\leqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$,则 $2x+y$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

题2的解 设 $2a+b=t$,联立方程组得 $\begin{cases}4a^2-2ab+4b^2-c=0,\\2a+b=t,\end{cases}$

消去 b 整理得:

$24a^2-18at+4t^2-c=0$.

由题意知,方程有解,$\Delta=(-18t)^2-4\times24\times(4t^2-c)\geqslant0$,解得 $t^2\leqslant\frac{8}{5}c$,因此 $t_{\max}=\sqrt{\frac{8}{5}c}$,即 $|2a+b|$ 的最大值为 $\sqrt{\frac{8}{5}c}$. 此时,$a=-\frac{-18t}{2\times24}=\frac{3}{8}t$,$b=t-2a=\frac{1}{4}t$,即 $2a=3b$,代入原式得 $c=10b^2$.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net