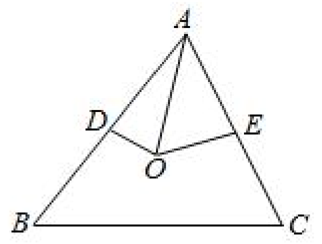
泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学单元考（2）试卷参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．第 1 到第 10 小题为单选题，第 11、12 小题为多选题.）

AABBA　BDDAB　ABCD　AC

10　解：如图所示，取 AB 的中点 D, AC 的中点 E，连接 OD, OE，



则 $OD \perp AB, OE \perp AC$；

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AO}\right| \cos\angle BAO = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}{2}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}{2}$，

所以由 $\dfrac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC} = 2m\overrightarrow{AO}$，设 ΔABC 的外接圆半径为 R，则

$\left|\overrightarrow{AO}\right| = R$，由正弦定理得 $\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\sin C} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\sin B} = 2R$，所以 $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2R\sin C, \left|\overrightarrow{AC}\right| = 2R\sin B$，且 $\left|\overrightarrow{AO}\right| = R$，

代入可得 $2\cos B\sin C \cdot R^2 + 2\cos C\sin B \cdot R^2 = 2mR^2$，所以 $\sin C\cos B + \cos C\sin B = \sin(B+C) = \sin A = m$，

又因为 $\tan A = 2$，可得 $\sin A = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $m = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故选 B.

二、双空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，若有两空，一空 2 分，第二空 3 分.）

13．64π　$\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$　　14．$2\sqrt{14}$　$(x-\dfrac{3}{2})^2 + (y-\dfrac{3}{2})^2 = \dfrac{9}{2}$　　15．$60°$　$120°$

16．$\dfrac{3}{2}$　4

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤．第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.：(1) 因为 $a\sin A + b\sin B + \sqrt{2}b\sin A = c\sin C$．所以 $a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = c^2$．______________（2 分）

由余弦定理得 $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．又 $0 < C < \pi$，所以 $C = \dfrac{3\pi}{4}$．______________（5 分）

（2）由（1）知 $C = \dfrac{3\pi}{4}$ 根据余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2\times2\times2\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 20$.

所以 $c = 2\sqrt{5}$．————————————————————————（7 分）

由正弦定理得 $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$，即 $\dfrac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sin B}$．解得 $\sin B = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，从而 $\cos B = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

设 BC 的中垂直交于 BC 于点 E．因为在 $Rt\Delta BDE$ 中，$\cos B = \dfrac{BE}{BD}$，所以 $BD = \dfrac{BE}{\cos B} = \dfrac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

因为 DE 为线段 BC 的中垂线. 所以 $CD=BE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ______________（10 分）

18.

（1）$\because \vec{m}=\left(-\dfrac{4}{5}-\cos\left(A+B\right),\cos^2\dfrac{A-B}{2}\right)$， $\vec{n}=\left(\dfrac{5}{8},1\right)$，且 $\vec{m}\perp\vec{n}$，$\therefore \vec{m}\bullet\vec{n}=0$，即

$\vec{m}\bullet\vec{n}=\dfrac{5}{8}\left[-\dfrac{4}{5}-\cos\left(A+B\right)\right]+\cos^2\dfrac{A-B}{2}=0$，$-5\cos\left(A+B\right)+4\cos\left(A-B\right)=0$，______________（3 分）

$-5\cos A\cos B+5\sin A\sin B+4\cos A\cos B+4\sin A\sin B=0$，

$-\cos A\cos B+9\sin A\sin B=0$，因此 $\tan A\tan B=\dfrac{1}{9}$.______________（6 分）

（2）$\because S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 由余弦定理，$\therefore$ $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{c^2-a^2-b^2}=\dfrac{\frac{1}{2}ab\sin C}{c^2-a^2-b^2}=-\dfrac{ab\sin C}{4ab\cos C}=-\dfrac{1}{4}\tan C$，

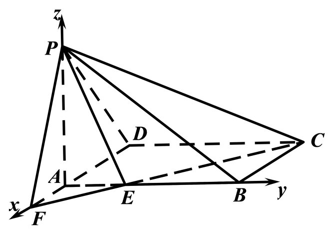
在 ΔABC 中，$\because \tan C=-\tan\left(A+B\right)$，______________（7 分）

$\therefore \dfrac{S_{\Delta ABC}}{c^2-a^2-b^2}=\dfrac{1}{4}\tan\left(A+B\right)=\dfrac{\tan A+\tan B}{4\left(1-\tan A\tan B\right)}=\dfrac{\tan A+\tan B}{4\left(1-\frac{1}{9}\right)}$，______________（9 分）

$\because \tan A+\tan B\geq 2\sqrt{\tan A\tan B}=\dfrac{2}{3}$，______________（10 分）

$\therefore \dfrac{S_{\Delta ABC}}{c^2-a^2-b^2}\geq\dfrac{3}{16}$，即当且仅当 $A=B$ 时，$\left(\dfrac{S_{\Delta ABC}}{c^2-a^2-b^2}\right)_{\min}=\dfrac{3}{16}$.______________（12 分）

19.



（1）$\because$ 底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore$ $AD\perp AB$，$AD\perp AP$，$AB\perp AP$

以 A 为坐标原点，AF，AB，AP 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系. __________（1 分）

因为 E 是 AB 的一个三等分点（靠近点 A），所以 $AE=\dfrac{1}{3}AB$，$EB=\dfrac{2}{3}AB$.

因为 ΔPAD 是等腰三角形，且 $PA\perp AD$，所以 $PA=AD$.

不妨设 $PA=AD=3$，则 $AB=6$，$BC=3$，$AE=2$，$EB=4$.

又由平行线分线段成比例，得 $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{AE}{DC}=\dfrac{1}{3}$，所以 $AF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{3}{2}$.

所以点 $P\left(0,0,3\right)$，$E\left(0,2,0\right)$，$F\left(\dfrac{3}{2},0,0\right)$，$D\left(-3,0,0\right)$，

则 $\overrightarrow{PD}=\left(-3,0,-3\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{3}{2},-2,0\right)$______________（4 分）

设异面直线 PD 与 EF 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{PD},\overrightarrow{EF}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{EF}}{\left|\overrightarrow{PD}\right|\left|\overrightarrow{EF}\right|}\right|=\left|\dfrac{-3\times\dfrac{3}{2}+0\times(-2)+(-3)\times0}{3\sqrt{2}\times\dfrac{5}{2}}\right|=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

所以异面直线 PD 与 EF 所成角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$. ______________（6 分）

（2）建系，求点的坐标同（1），则 $\overrightarrow{PE}=\left(0,2,-3\right)$，$\overrightarrow{PF}=\left(\dfrac{3}{2},0,-3\right)$.

设平面 PEF 的法向量为 $n=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{PE}=0\\ n\cdot\overrightarrow{PF}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2y-3z=0\\ \dfrac{3}{2}x-3z=0\end{cases}$.

令 $z=2$，得平面 PEF 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(4,3,2\right)$；______________（8 分）

又易知平面 PEA 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(1,0,0\right)$. ______________（9 分）

设二面角 $A-PE-F$ 的大小为 φ，由题意得 φ 为锐角，

所以 $\cos\varphi=\left|\cos<\vec{n},\vec{m}>\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right|}\right|=\left|\dfrac{4\times1+3\times0+2\times0}{\sqrt{29}\times1}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{29}}$，则 $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$. ______________（11 分）

所以二面角 $A-PE-F$ 的正切值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$. ______________（12 分）

20.

（1）取 CD 中点 M，则中点即所求的点 M. 理由如下：$\because E,M$ 分别为 PC,CD 的中点，$\therefore EM//PD$.

又 $\because PD\subset$ 面 PAD，$EM\not\subset$ 面 PAD .$\therefore EM//$ 面 PAD .______________（3 分）

易知四边形 $ABMP$ 为平行四边形，所以 $BM//AD$，$AD\subset$ 面 PAD，$BM\not\subset$ 面 PAD，

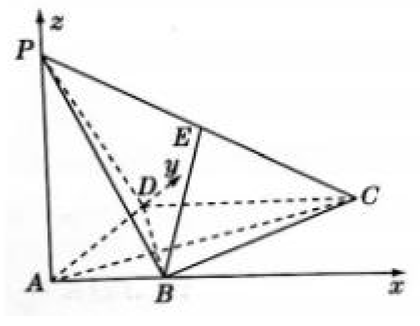
$BM//$ 面 PAD .又 $EM\cap BM=M$，$\therefore$ 平面 $BEM//$ 平面 PAD .______________（6 分）

（2）由题意知 AB,AD,AP 两两互相垂直，建立如图所示的空间直角坐标系，______________（7 分）

则向量 $\overrightarrow{BC}=\left(1,2,0\right)$，$\overrightarrow{CP}=\left(-2,-2,2\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(2,2,0\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(1,0,0\right)$.

由点 F 在棱 PC 上，设 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP},0\le\lambda\le1$，.

故 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CP}=\left(1-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda\right)$.



由 $\overline{BF}\perp\overline{AC}$，得 $\overline{BF}\bullet\overline{AC}=0$，因此 $2(1-2\lambda)+2(2-2\lambda)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$.

即 $\overline{BF}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.设 $\overline{n_1}=(x,y,z)$ 为平面 FAB 的法向量，

则 $\begin{cases}\overline{n_1}\bullet\overline{AB}=0,\\ \overline{n_1}\bullet\overline{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{3}{2}z=0\end{cases}$.不妨设 $z=1$，

可得平面 FAB 的一个法向量为 $\overline{n_1}=(0,-3,1)$.______________（9 分）

取平面 ABC 的法向量 $\overline{n_2}=(0,0,1)$，______________（10 分）

则 $\cos\left\langle\overline{n_1},\overline{n_2}\right\rangle=\dfrac{\overline{n_1}\bullet\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.二面角 $F-AB-C$ 是锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.______________（12 分）

21．

（1）根据散点图判断，在推广期内， $y=c\cdot d^x$（c,d 均为大于零的常数），适宜作为扫码支付的人次 y 关于活动推出天数 x 的回归方程类型.______________（2 分）

（2）根据（1）的判断结果 $y=c\cdot d^x$，两边取对数得 $\lg y=\lg c+\lg d\cdot x$，______________（4 分）

其中 $v_i=\lg y_i$， $\overline{v}=\dfrac{1}{7}\sum\limits_{i=1}^{7}v_i=1.54$， $\sum\limits_{i=1}^{7}x_iv_i=50,12,\overline{x}=4,\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^{\ 2}=140$，

$\hat{\beta}=\lg d=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iv_i-n\overline{x}\cdot\overline{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-n\overline{x}^2}=0.25$，$\hat{\alpha}=\lg c=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{x}=0.54$，所以 $\lg y=0.54+0.25\cdot x$ 。______________（8 分）

所以 $y=10^{0.54+0.25\cdot x}=3.47\times10^{0.25x}$ 。当 $x=8$ 时， $y=10^{0.54+0.25\cdot 8}=3.47\times10^2=347$ 。______________（11 分）

所以活动推出第 8 天使用扫码支付的人次 3470 人.______________（12 分）

22．

（Ⅰ）$\because\vec{u}=(\sin\omega x,-1)$， $\vec{v}=\left(\sin\omega x+\cos\omega x,\dfrac{1}{2}\right)$，

$\therefore f(x)=\vec{u}\cdot\vec{v}=\sin\omega x(\sin\omega x+\cos\omega x)-\dfrac{1}{2}=\sin^2\omega x+\sin\alpha x\cdot\cos\omega x-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1-\cos2\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin2\omega x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(\sin2\omega x-\cos2\omega x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{4}\right)$______________（2 分）

若函数 $f(x)$ 的图象上两个相邻的对称轴距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，则函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$，

$\therefore \dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$，$\therefore f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$______________（3 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$-\dfrac{\pi}{4}\le 2x-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{4}$

$\therefore$若方程 $f\left(x\right)=m$ 在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$有两个不同实数根，则 $\dfrac{1}{2}\le m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.______________（4 分）

$\therefore$令 $2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，则 $x=\dfrac{3\pi}{8}+k\pi$，$k\in Z$，$\therefore$函数在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$内的对称轴为 $x=\dfrac{3\pi}{8}$，

$\because x_1$，x_2 是方程 $f\left(x\right)=m$，$m>0$ 的两个不同根，$\therefore x_1+x_2=\dfrac{3\pi}{4}$______________（6 分）

（Ⅲ）因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)$，所以 $g(x)=\sin 2x+\dfrac{a}{2}(\sin x-\cos x)$，

令 $\sin x-\cos x=t$，则 $\sin 2x=1-t^2$. $\therefore y=1-t^2+\dfrac{a}{2}t=-\left(t-\dfrac{a}{4}\right)^2+\dfrac{a^2}{16}+1$

又$\because t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，得，$-\dfrac{\pi}{2}\le x-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore -\sqrt{2}\le t\le 1$.______________________________（8 分）

（1）当 $\dfrac{a}{4}<-\sqrt{2}$，即 $a<-4\sqrt{2}$ 时，可知 $y=-t^2+\dfrac{a}{2}t+1$ 在$[-\sqrt{2},1]$上为减函数，

则当 $t=-\sqrt{2}$ 时 $y_{\max}=-(\sqrt{2})^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-1$，

由 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-1=2$，解得：$a=-3\sqrt{2}>-4\sqrt{2}$，不合题意，舍去.__________________（9 分）

（2）当 $-\sqrt{2}\le\dfrac{a}{4}\le 1$，即 $-4\sqrt{2}\le a\le 4$ 时，结合图象可知，当 $t=\dfrac{a}{4}$ 时，$y_{\max}=\dfrac{a^2}{16}+1$，

由 $\dfrac{a^2}{16}+1=2$，解得 $a=\pm 4$，满足题意.__________________（10 分）

（3）当 $\dfrac{a}{4}>1$，即 $a>4$ 时，知 $y=-t^2+\dfrac{a}{2}t+1$ 在$[-\sqrt{2},1]$上为增函数，

则 $t=1$时，$y_{\max}=\dfrac{a}{2}$，由 $\dfrac{a}{2}=2$ 得 $a=4$，舍去_________________（11 分）

综上，$a=-4$ 或 $a=4$ 为所求.________________（12 分）