

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二年数学单元考（1）试卷

命题人：杜成北 20200906

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。第 1 到第 10 小题为单选题，第 11、12 小题为多选题。）

1. 已知角 α 终边上一点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $b \cos C + c \cos B = a \sin A$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

A. 直角三角形 B. 锐角三角形 C. 钝角三角形 D. 不确定
3. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M 为 AC 和 BD 的交点，若 $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{A_1A} = \vec{c}$ ，则下列式子中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的是 ()

A. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ D. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
4. 若 l, m, n 是互不相同的空间直线， α, β 是不重合的平面，则下列命题中正确的是 ()

A. 若 $\alpha // \beta$ ， $l \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，则 $l // n$ B. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $l \subset \alpha$ ，则 $l \perp \beta$
 C. 若 $l \perp n$ ， $m \perp n$ ，则 $l // m$ D. 若 $l \perp \alpha$ ， $l // \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
5. 为了研究某班学生的脚长 x (单位：厘米) 和身高 y (单位：厘米) 的关系，从该班随机抽取 10 名学生，根据测量数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系，设其线性回归方程为 $y = \hat{b}x + a$ 。已知 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 225$ ， $\sum_{i=1}^{10} y_i = 1600$ ， $\hat{b} = 4$ 。该班某学生的脚长为 24，据此估计其身高为 ()

A. 160 B. 163 C. 166 D. 170
6. 在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中， E, F 分别是 BC, AD 的中点，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CF} =$ ()

A. $-\frac{3}{4}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$
7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 O 是四边形 $ABCD$ 的中心，关于直线 A_1O ，下列说法正确的是 ()

A. $A_1O // D_1C$ B. $A_1O \perp BC$ C. $A_1O //$ 平面 B_1CD_1 D. $A_1O \perp$ 平面 AB_1D_1
8. 已知某 8 个数据的平均数为 5，方差为 3，现又加入一个新数据 5，此时这 9 个数的平均数为 \bar{x} ，方差为 s^2 ，则 ()

A. $\bar{x} = 5$ ， $s^2 > 3$ B. $\bar{x} = 5$ ， $s^2 < 3$ C. $\bar{x} > 5$ ， $s^2 < 3$ D. $\bar{x} > 5$ ， $s^2 > 3$
9. 将函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos \omega x - \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象过点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ，则 ω 的最小值为 ()

A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

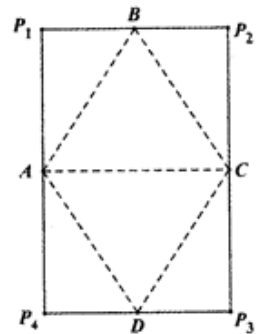
10. 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: 2x + y + 2 = 0$, P 为 l 上的动点, 过点 P 作圆 M 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为 ()
- A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

11. (多选题) 有下列四个命题, 其中正确的命题有 ()

- A. 已知 A, B, C, D 是空间任意四点, 则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$
- B. 若两个非零向量 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{CD} 满足 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$
- C. 分别表示空间向量的有向线段所在的直线是异面直线, 则这两个向量可以是共面向量
- D. 对于空间的任意一点 O 和不共线的三点 A, B, C , 若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ ($x, y, z \in \mathbf{R}$), 则 P, A, B, C

四点共面

12. (多选题) 如图, 一张 A4 纸的长、宽分别为 $2\sqrt{2}a, 2a$. A, B, C, D 分别是其四条边的中点. 现将其沿图中虚线掀折起, 使得 P_1, P_2, P_3, P_4 四点重合为一点 P , 从而得到一个多面体. 关于该多面体的下列命题中正确的是 ()

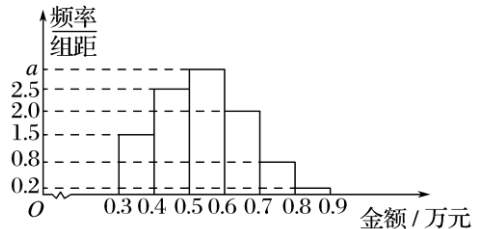


- A. 该多面体是三棱锥且体积为 $2a^3$; B. 平面 $BAD \perp$ 平面 BCD ;
- C. 平面 $BAC \perp$ 平面 ACD ; D. 该多面体外接球的表面积为 $5\pi a^2$.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 若有两空, 则第一空 2 分, 第二空 3 分.)

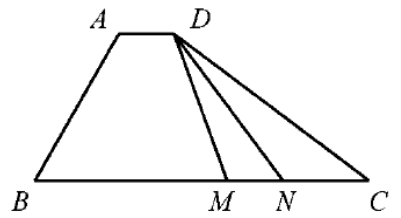
13. 已知复数 z 在复平面内对应点是 $(1, -2)$, i 为虚数单位, 则复数 $z =$ _____; $\frac{z+2}{z-1} =$ _____.

14. 某电子商务公司对 10000 名网络购物者 2019 年度的消费情况进行统计, 发现消费金额 (单位: 万元) 都在区间 $[0.3, 0.9]$ 内, 其频率分布直方图如图所示:



- (1) 直方图中的 $a =$ _____;
- (2) 在这些购物者中, 消费金额在区间 $[0.5, 0.9]$ 内的购物者的人数为 _____.

15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 3$, $BC = 6$, 且 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}$, 则实数 λ 的值为 _____;



若 M, N 是线段 BC 上的动点, 且 $|\overrightarrow{MN}| = 1$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 的最小值为 _____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 和面积 S 满足 $S = a^2 - (b-c)^2$, 且 $b+c = 8$.

则 $\cos A =$ _____; S 的最大值为 _____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 小题满分 10 分，其他小题满分 12 分）

17.（本小题满分 10 分）函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + \sqrt{3} \cos(2x + \pi)$ 。

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $f\left(\frac{A}{2}\right) = 1$ ， $\sin C = 2 \sin B$ ，且 $a = 2$ ，

求 $\triangle ABC$ 的面积。

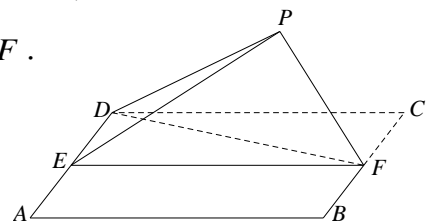
18.（本小题满分 12 分）如图，四边形 $ABCD$ 为正方形， E, F 分别为 AD, BC 的中点，

以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起，使点 C 到达点 P 的位置，且 $PF \perp BF$ 。

（I）证明： $AB \parallel$ 平面 PEF ；

（II）证明：平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$ ；

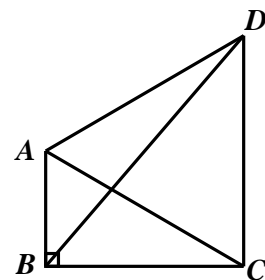
（III）求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值。



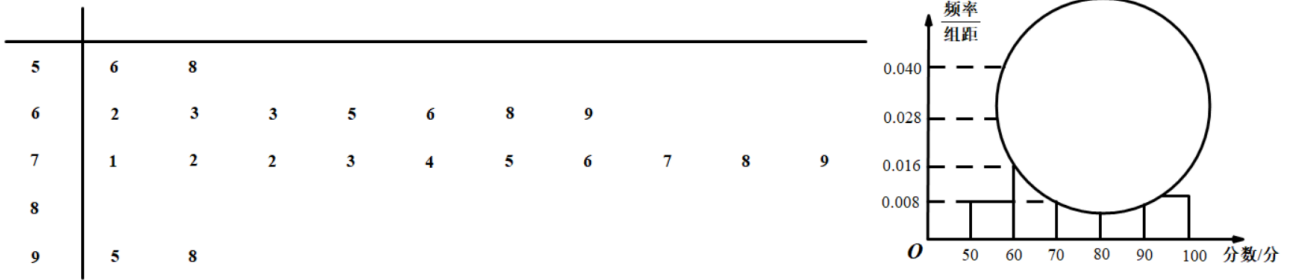
19.（本小题满分 12 分）在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle DAC = 2\angle ACB$ ， $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$ 。

（I）若 $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$ ， $BC = \sqrt{3}$ ，求 BD ；

（II）若 $DC = \sqrt{3}AB$ ，求 $\cos \angle ACB$ 。



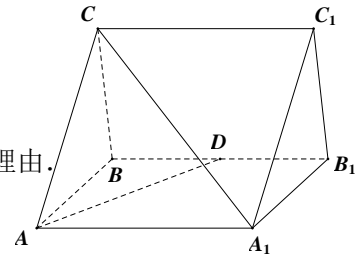
20. (本小题满分 12 分) 某校组织了一次新高考质量测评, 在成绩统计分析中, 某班的数学成绩的茎叶图和频率分布直方图因故都受到不同程度的损坏, 但可见部分如下, 据此解答如下问题:



- (I) 求该班数学成绩在 $[50, 60)$ 的频率及全班人数;
- (II) 根据频率分布直方图估计该班这次测评的数学平均分;
- (III) 若规定 90 分及其以上为优秀, 现从该班分数在 80 分及其以上的试卷中任取 2 份分析学生得分情况, 求在抽取的 2 份试卷中至少有 1 份优秀的概率.

21. (本小题满分 12 分) 如图, 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = AB$, D 为 BB_1 的中点.

- (I) 求证: $A_1C \perp AD$;
- (II) 若点 P 在四边形 ABB_1A_1 内部或其边界, 且满足三棱锥 $P - ABC$ 的体积等于三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 体积的 $\frac{1}{6}$, 试在图中画出 P 点的轨迹, 并说明理由.



22. (本小题满分 12 分) 已知向量 $\vec{a} = (2\sin(\omega x + \frac{\pi}{4}), -\sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sin(\omega x + \frac{\pi}{4}), \cos(2\omega x))$ ($\omega > 0$)

函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - 1$, $f(x)$ 的最小正周期为 π .

- (I) 求 $f(x)$ 的单调增区间;
- (II) 方程 $f(x) - 2n + 1 = 0$ 在 $[0, \frac{7\pi}{12}]$ 上有且只有一个解, 求实数 n 的取值范围;
- (III) 是否存在实数 m 满足对任意 $x_1 \in [-1, 1]$, 都存在 $x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $4^{x_1} + 4^{-x_1} + m(2^{x_1} - 2^{-x_1}) + 1 > f(x_2)$ 成立. 若存在, 求 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

泉州七中 2020-2021 学年度上学期高二数学单元考 (1) 试卷参考答案

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 第 1 到第 10 小题为单选题, 第 11、12 小题为多选题.)

DAADC BCBCD BC BCD

10. 【解析】圆的方程可化为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 点 M 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|2 \times 1 + 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} > 2$,

所以直线 l 与圆相离. 依圆的知识可知, 四点 A, P, B, M 四点共圆, 且 $AB \perp MP$,

所以 $|PM| \cdot |AB| = 4S_{\triangle PAM} = 4 \times \frac{1}{2} \times |PA| \times |AM| = 4|PA|$, 而 $|PA| = \sqrt{|MP|^2 - 4}$,

当直线 $MP \perp l$ 时, $|MP|_{\min} = \sqrt{5}$, $|PA|_{\min} = 1$, 此时 $|PM| \cdot |AB|$ 最小.

$$\therefore MP: y-1 = \frac{1}{2}(x-1) \text{ 即 } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ 由 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \text{ 解得, } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

所以以 MP 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x+1) + y(y-1) = 0$, 即 $x^2 + y^2 - y - 1 = 0$,

两圆的方程相减可得: $2x + y + 1 = 0$, 即为直线 AB 的方程.

12. 【解析】A 选项, 由 $AP \perp BP$, $CP \perp BP$ 得 $BP \perp$ 面 ACP , 同理 $DP \perp$ 面 ACP , 所以 B, P, D 三点共线

所以该多面体是三棱锥, 且易得体积为 $\frac{2}{3}a^3$, 所以 A 不正确

B 选项, 由 $AP \perp BP$, $CP \perp AP$ 得 $AP \perp$ 面 BCD , 而由 $AP \subset$ 面 ABD , 所以 B 正确

C 选项, 同理 B 选项, 可知 C 选项正确

D 选项, 由 A 可知该四面体的对棱相等, 可以补成一个长方体, 从而得到半径为 $\frac{\sqrt{5}a}{2}$, 所以 D 正确

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 若有两空, 则第一空 2 分, 第二空 3 分.)

13. $1-2i$; $1+\frac{3}{2}i$ 14. (1) 3; (2) 6000 15. $\frac{1}{6}$; $\frac{13}{2}$ 16. $\frac{15}{17}$; $\frac{64}{17}$

15. 【解析】 $\because \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\therefore AD \parallel BC$, $\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle B = 120^\circ$,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos 120^\circ = \lambda \times 6 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -9\lambda = -\frac{3}{2}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{6},$$

以点 B 为坐标原点, BC 所在直线为 x 轴建立如下图所示的平面直角坐标系 xBy ,

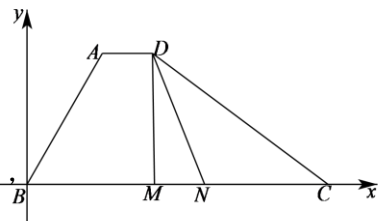
$$\because BC = 6, \therefore C(6, 0), \because |AB| = 3, \angle ABC = 60^\circ, \therefore A \text{ 的坐标为 } A\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\because \text{又 } \because \overrightarrow{AD} = \frac{1}{6} \overrightarrow{BC}, \text{ 则 } D\left(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 设 } M(x, 0), \text{ 则 } N(x+1, 0) \text{ (其中 } 0 \leq x \leq 5),$$

$$\overrightarrow{DM} = \left(x - \frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{DN} = \left(x - \frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = \left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = x^2 - 4x + \frac{21}{2} = (x-2)^2 + \frac{13}{2}.$$

所以, 当 $x = 2$ 时, $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 取得最小值 $\frac{13}{2}$.



16. 【解析】 $\because S = a^2 - (b-c)^2$, 且 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\therefore \frac{1}{2}bc \sin A = 2bc(1 - \cos A)$.

$$\therefore \sin A = 4(1 - \cos A), \quad 0 < 4(1 - \cos A) < 1, \quad \therefore \frac{3}{4} < \cos A < 1. \quad \therefore \sin^2 A = 16(1 - \cos A)^2,$$

$$\therefore 17\cos^2 A - 32\cos A + 15 = 0. \quad \text{得 } \cos A = \frac{15}{17}. \quad \therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{8}{17},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{4}{17}bc = \frac{4}{17}b(8-b) = \frac{4}{17}[-(b-4)^2 + 16] \leq \frac{64}{17} \quad (\text{当 } b=4 \text{ 时取最大值}),$$

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 小题满分 10 分, 其他小题满分 12 分)

17. 解: (I) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + \sqrt{3} \cos(\pi + 2x) = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos 2x$
 $= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + 1 = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) $f(A) = 2 \sin(A - \frac{\pi}{3}) + 1 = 1, \quad \sin(A - \frac{\pi}{3}) = 0,$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} < A - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}, \quad \therefore A - \frac{\pi}{3} = 0, \quad \text{即 } A = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由正弦定理及 $\sin C = 2 \sin B$, 可得 $c = 2b. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$, 可得 $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\therefore b = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解: (I) 因为四边形 $ABCD$ 为正方形且 E, F 分别为 AD, BC 的中点

所以 $AE // BF$ 且 $AE = BF$, 所以四边形 $ABFE$ 为平行四边形 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

所以 $AB // EF$, 又因为 $AB \not\subset$ 平面 PEF , $EF \subset$ 平面 PEF

所以 $AB //$ 平面 $PEF \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II) 由已知可得, $BF \perp PF$, $BF \perp EF$, 且 $PF \cap EF = F$

所以 $BF \perp$ 平面 $PEF. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

又 $BF \subset$ 平面 $ABFD$, 所以平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(III) 作 $PH \perp EF$, 垂足为 H . 由 (II) 得, $PH \perp$ 平面 $ABFD. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

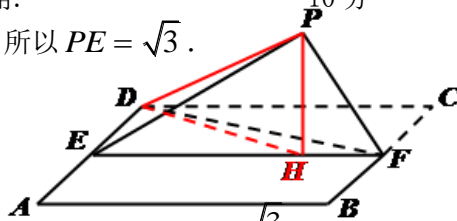
连接 DH , 则 $\angle PDH$ 为 DP 与平面 $ABFD$ 所成的角. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

由 (II) 可得, $DE \perp PE$. 又 $DP = 2, DE = 1$, 所以 $PE = \sqrt{3}.$

又 $PF = 1, EF = 2$, 故 $PE \perp PF.$

$$\text{可得 } PH = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad EH = \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以 } \sin \angle PDH = \frac{PH}{PD} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \text{即 } DP \text{ 与平面 } ABFD \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



19. 解: (I) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由 $\angle ACB = \frac{\pi}{6}, BC = \sqrt{3}$, 得 $AB = 1, \angle BAC = \frac{\pi}{3}, AC = 2 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又 $\angle DAC = 2\angle ACB = \frac{\pi}{3}, \angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle ADC$ 为等边三角形,

所以 $CD = 2, \angle ACD = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又 $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle BCD = \angle ACB + \angle ACD = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2};$

在 $\triangle ABD$ 中, 由勾股定理得 $BD^2 = CB^2 + CD^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7$, 解得 $BD = \sqrt{7}$ 6分

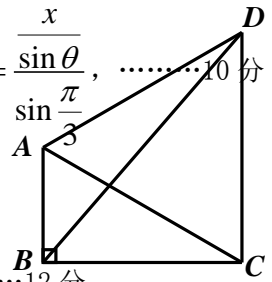
(II) 设 $\angle ACB = \theta$, $AB = x$, 则 $\angle DAC = 2\theta$, $DC = \sqrt{3}x$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = \frac{AB}{\sin \theta} = \frac{x}{\sin \theta}$,8分

在 $\triangle ACD$ 中, 根据正弦定理得, $\frac{DC}{\sin \angle DAC} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$, 即 $\frac{\sqrt{3}x}{\sin 2\theta} = \frac{\frac{x}{\sin \theta}}{\sin \frac{\pi}{3}}$,10分

$$\therefore \sqrt{3}x \sin \frac{\pi}{3} = \sin 2\theta \cdot \frac{x}{\sin \theta}, \quad \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{x}{\sin \theta},$$

解得 $\cos \theta = \frac{3}{4}$, 即 $\cos \angle ACB = \frac{3}{4}$12分



20. 解: (I) 数学成绩在 $[50, 60)$ 频率为 $0.008 \times 10 = 0.08$,1分

由茎叶图知: 分数在 $[50, 60)$ 之间的频数为 2,2分

所以全班人数为: $\frac{2}{0.08} = 25$;3分

(II) 由第 (I) 可得第四组的频数为 $25 - 2 - 7 - 10 - 2 = 4$, 则第四组的频率为 $\frac{4}{25} = 0.16$ 4分

\therefore 各组频率依次是: 0.08, 0.28, 0.4, 0.16, 0.08,5分

估计平均分为: $55 \times 0.08 + 65 \times 0.28 + 75 \times 0.4 + 85 \times 0.16 + 95 \times 0.08 = 73.8$;7分

(III) 由已知得 $[80, 100)$ 的人数为: $(0.16 + 0.08) \times 25 = 4 + 2 = 6$,

设分数在 $[80, 90)$ 的试卷为 A, B, C, D , 分数在 $[90, 100]$ 的试卷为 a, b8分

则从 6 份卷中任取 2 份, 共有 15 个基本事件, 分别是: $AB, AC, AD, Aa, Ab, BC, BD, Ba, Bb, CD, Ca, Cb, Da, Db, ab$,10分

其中至少有一份优秀的事件共有 9 个, 分别是 $Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb, Da, Db, ab$,

在抽取的 2 份试卷中至少有 1 份优秀的概率为 $P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$12分

21. 解: (I) 取 AB 的中点 F , 连接 CF, A_1F ,

$\because AA_1 \perp$ 面 ABC , $CF \subset$ 面 ABC , \therefore 所以 $AA_1 \perp CF$1分

$\because \triangle CAB$ 为正三角形, F 为 AB 的中点, $\therefore CF \perp AB$,2分

又 $\because AA_1, AB \subset$ 平面 AA_1B_1B , $AA_1 \cap AB = A$,

$\therefore CF \perp$ 平面 AA_1B_1B ,3分

又 $\because AD \subset$ 平面 AA_1B_1B , 所以 $CF \perp AD$4分

正方形 AA_1B_1B 中, $\because \text{Rt}\triangle A_1AF \cong \text{Rt}\triangle ABD$, $\therefore \angle DAB = \angle FA_1A$,

又 $\because \angle AFA_1 + \angle FA_1A = 90^\circ$, $\therefore \angle AFA_1 + \angle DAB = 90^\circ$, 故 $AD \perp A_1F$,5分

又 $\because CF \cap A_1F = F$, $CF, A_1F \subset$ 平面 A_1CF , $\therefore AD \perp$ 平面 A_1CF ,

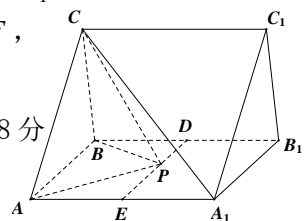
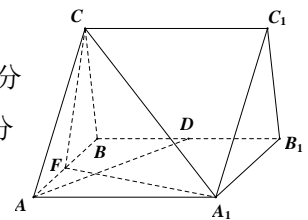
又 $\because A_1C \subset$ 平面 A_1CF , $\therefore A_1C \perp AD$6分

(II) 取 AA_1 中点 E , 连接 DE , 则线段 DE 为点 P 的运动轨迹.8分

理由如下: $\because DE \parallel AB$, $DE \not\subset$ 平面 ABC , $AB \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore DE \parallel$ 平面 ABC , $\therefore P$ 到平面 ABC 的距离为 $\frac{1}{2}BB_1$10分

所以 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{6}V_{ABC-A_1B_1C_1}$12分



22. 解: (I) 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - 1 = 2\sin^2(\omega x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{3}\cos(2\omega x) - 1$

$$= \sin(2\omega x) - \sqrt{3}\cos(2\omega x) = 2\sin(2\omega x - \frac{\pi}{3}) \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为 π 且 $\omega > 0$, $\therefore \frac{2\pi}{2\omega} = \pi$ 即 $\omega = 1$ $\dots\dots\dots 2$ 分

那么 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}$, $k \in \mathbf{Z}$

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}]$, $k \in \mathbf{Z}$ $\dots\dots\dots 4$ 分

(II) 方程 $f(x) - 2n + 1 = 0$ 在 $[0, \frac{7\pi}{12}]$ 上有且只有一个解,

转化为函数 $y = f(x) + 1$ 与函数 $y = 2n$ 只有一个交点.

$\therefore x \in [0, \frac{7\pi}{12}]$, $\therefore 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$

那么函数 $y = f(x) + 1 = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$ 的值域为 $[1 - \sqrt{3}, 3]$, $\dots\dots\dots 6$ 分

结合图象可知函数 $y = f(x) + 1$ 与函数 $y = 2n$ 只有一个交点.

那么 $1 - \sqrt{3} \leq 2n < 2$ 或 $2n = 3$, 即 $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \leq n < 1$ 或 $n = \frac{3}{2}$ $\dots\dots\dots 8$ 分

(III) 由 (I) 可知 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$, $\therefore f(x_2)_{\min} = -2$

实数 m 满足对任意 $x_1 \in [-1, 1]$, 都存在 $x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $4^{x_1} + 4^{-x_1} + m(2^{x_1} - 2^{-x_1}) + 1 > f(x_2)$ 成立
即 $4^{x_1} + 4^{-x_1} + m(2^{x_1} - 2^{-x_1}) + 1 > -2$ 成立 $\dots\dots\dots 9$ 分

令 $y = 4^{x_1} + 4^{-x_1} + m(2^{x_1} - 2^{-x_1}) + 1$

设 $2^{x_1} - 2^{-x_1} = t$, 那么 $4^{x_1} + 4^{-x_1} = (2^{x_1} - 2^{-x_1})^2 + 2 = t^2 + 2$, 且 $\therefore x_1 \in [-1, 1]$, $\therefore t \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

可得 $t^2 + mt + 5 > 0$ 在 $t \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ 上成立. $\dots\dots\dots 10$ 分

令 $g(t) = t^2 + mt + 5 > 0$, 其对称轴 $t = -\frac{m}{2}$

\therefore ① 当 $-\frac{m}{2} \leq -\frac{3}{2}$ 时, 即 $m \geq 3$ 时, $g(t)_{\min} = g(-\frac{3}{2}) = \frac{29}{4} - \frac{3m}{2} > 0$, 解得 $3 \leq m < \frac{29}{6}$;

② 当 $-\frac{3}{2} < -\frac{m}{2} < \frac{3}{2}$, 即 $-3 < m < 3$ 时, $g(t)_{\min} = g(-\frac{m}{2}) = 5 - \frac{m^2}{4} > 0$, 解得 $-3 < m < 3$;

③ 当 $\frac{3}{2} \leq -\frac{m}{2}$, 即 $m \leq -3$ 时, $g(t)_{\min} = g(\frac{3}{2}) = \frac{29}{4} + \frac{3m}{2} > 0$, 解得 $-\frac{29}{6} < m \leq -3$;

综上所述, 存在满足题意的实数 m , 且 m 的取值范围是 $(-\frac{29}{6}, \frac{29}{6})$. $\dots\dots\dots 12$ 分