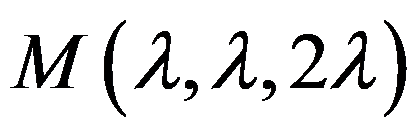
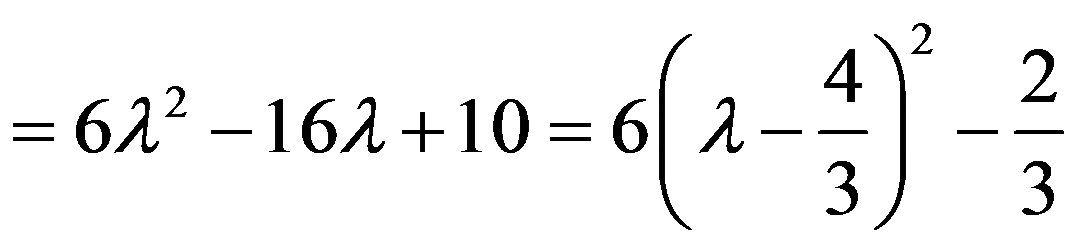
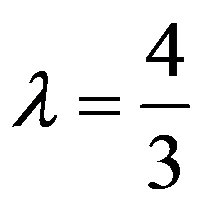
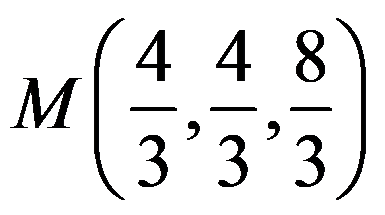
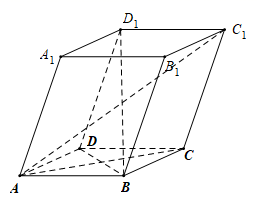
**2021-2022学年第一学期期末高二数学复习专题（立体几何与空间向量）答案**

**一、空间向量的有关概念与运算**

1.【答案】*A* 2.【答案】*D*

解：设，故，，当时，向量数量积有最小值，此时．故选*D*．

3.【答案】*C* 4.【答案】*BD*

5.【答案】*ACD*解：因为以顶点*A*为端点的三条棱长均为6，且它们彼此的夹角都是，所以，，则，所以*A*错误；，所以*B*正确；显然为等边三角形，则．

因为，且向量与的夹角是，所以与的夹角是，所以*C错误*；

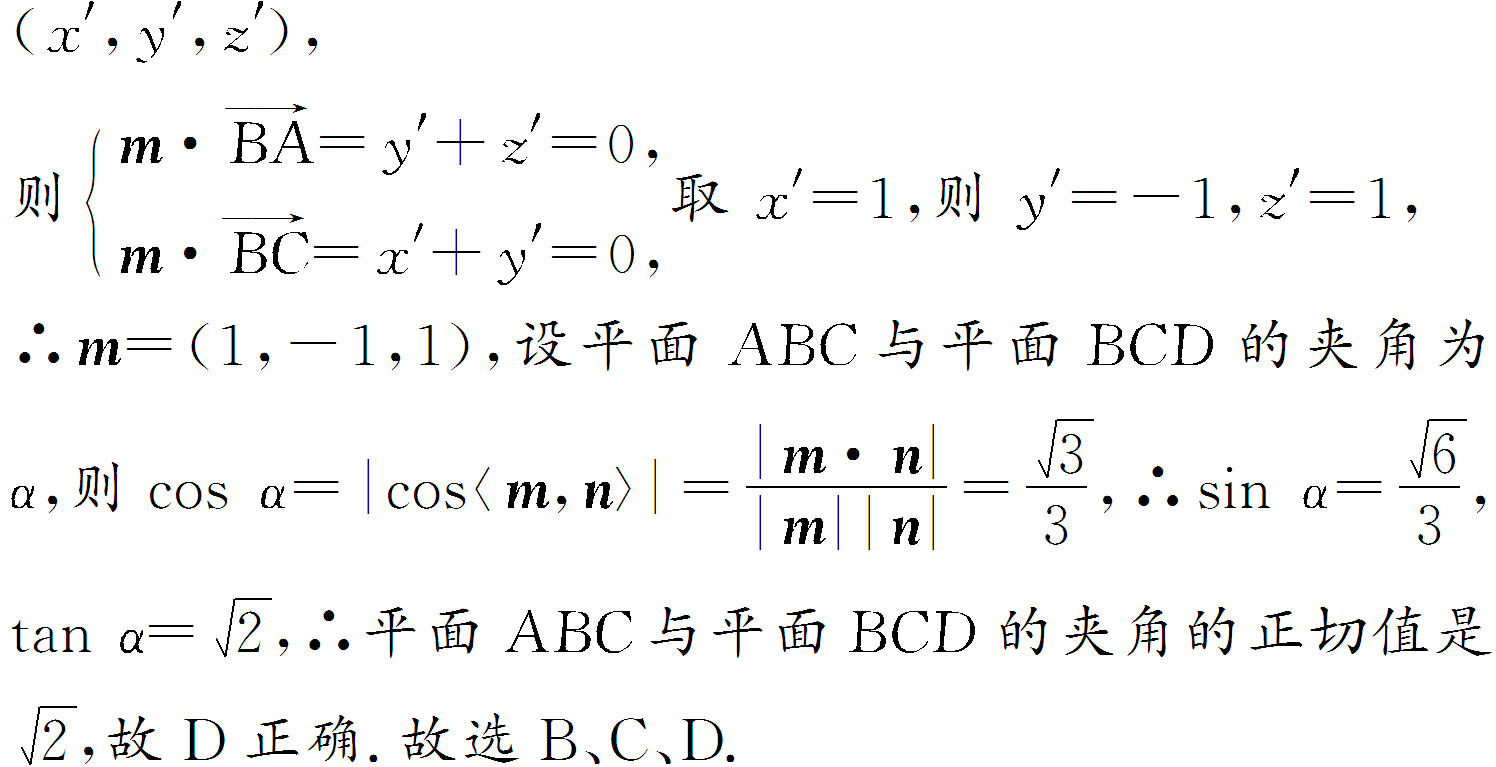
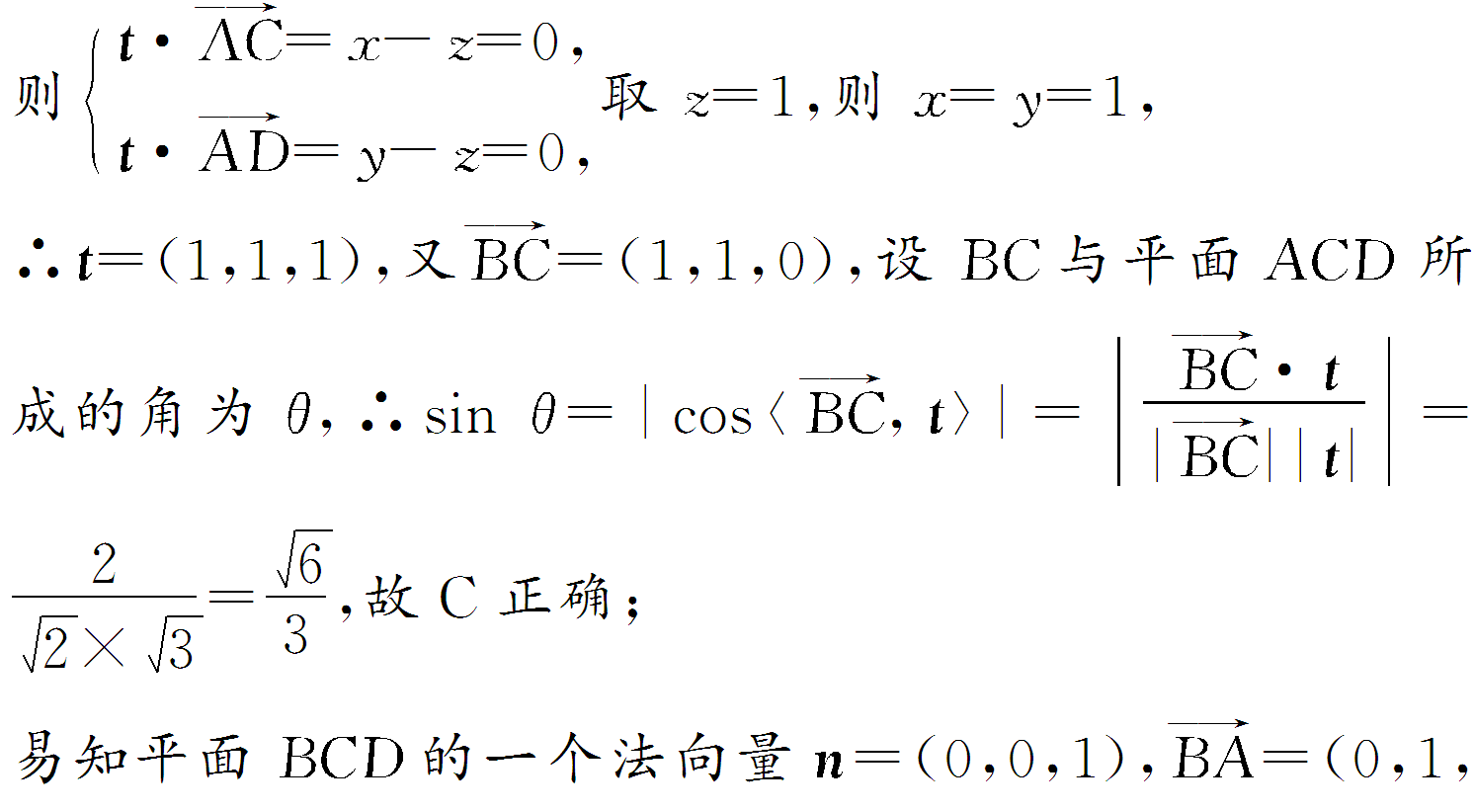
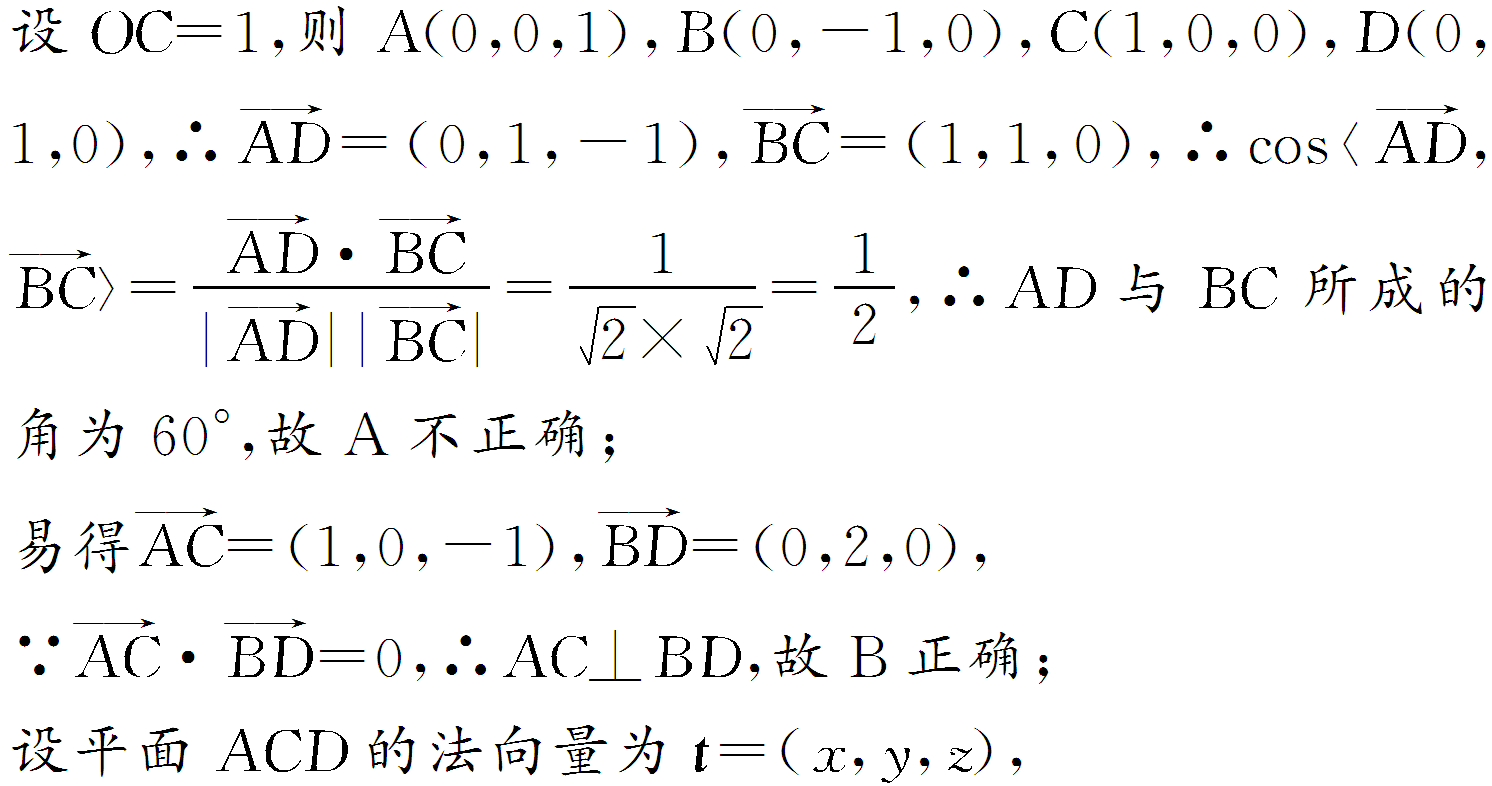
因为，所以，，

所以，所以*D*错误．故选*ACD*．

**6．**解析：单位向量分别为，，|a|＝6，|b|＝8，〈a，b〉＝120°，则*a*在*b*上的投影向量为|a|cos〈a，b〉＝＝－b，b在a上的投影向量为|b|cos〈a，b〉＝＝－a.答案：－b　－a

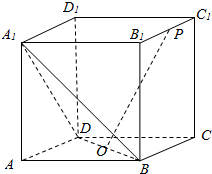
**二、空间夹角**

1．解析：选BCD　取*BD*的中点*O*，连接*AO*，*CO*.若将正方形*ABCD*沿对角线*BD*折成直二面角，则*OA*⊥*BD*，*OC*⊥*BD*，*OA*⊥*OC*，∴以*O*为原点，*OC*所在直线为*x*轴，*OD*所在直线为*y*轴，*OA*所在直线为*z*轴，建立如图所示的空间直角坐标系．

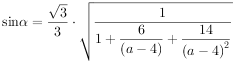


2.答案：

3.【答案】*C*解：设正方体的棱长为2，以*D*为原点，*DA*所在直线为*x*轴，*DC*所在直线为*y*轴，所在直线为*z*轴，建立空间直角坐标系，则，，，，，，

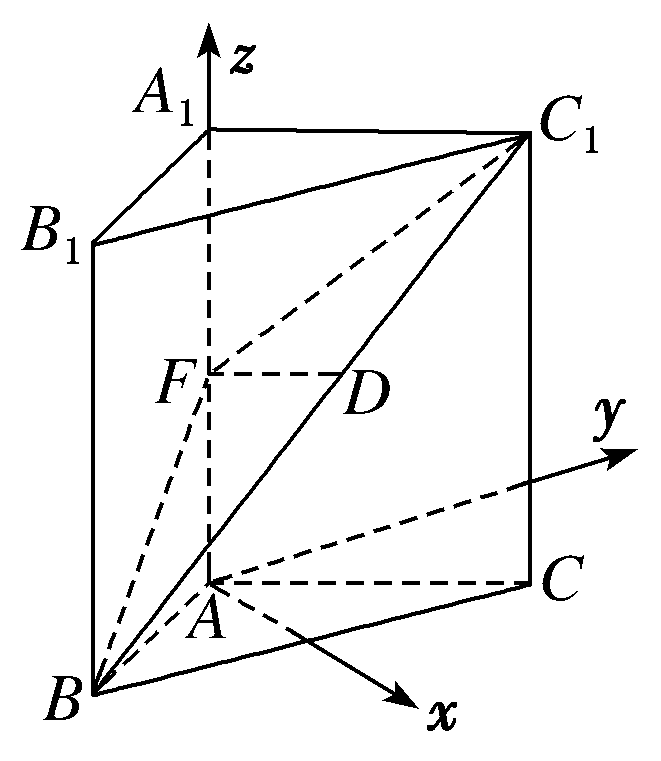
**，，，

设平面的法向量，则取，

得，则， 对于，因为，则令，则的对称轴为，故在上单调递减，又在上单调递减，根据复合函数的单调性可知，在上单调递增，故

在上单调递减，当时，取最小值为，当时，取最大值，所以的取值范围是．故选*C*．

**4.[解]**(1)如图，以*A*为原点，*BC*边上的高所在直线为*x*轴，平行于*BC*的直线为*y*轴，*AA*1所在直线为*z*轴，建立空间直角坐标系*Axyz*，∵*A*1*A*＝4，∴*A*1(0,0,4)．

∵∠*BAC*＝60°，*AB*＝*AC*＝2，∴*B*(，－1,0)，*C*(，1,0)，*C*1(，1，4)．

∵*D*是*BC*1上的点且*BD*＝*DC*1，∴*D*(，0,2)．设＝*λ*，则*F*(0,0,4*λ*)，∴＝(－，0,4*λ*－2)，∵*DF*∥平面*ABC*，平面*ABC*的一个法向量为(0,0,1)，

∴4*λ*－2＝0，即*λ*＝，∴的值为1.

(2)设＝*m AA*1，则*F*(0,0,4*m*)，＝(－，1,4*m*)，＝(0,2,4)．

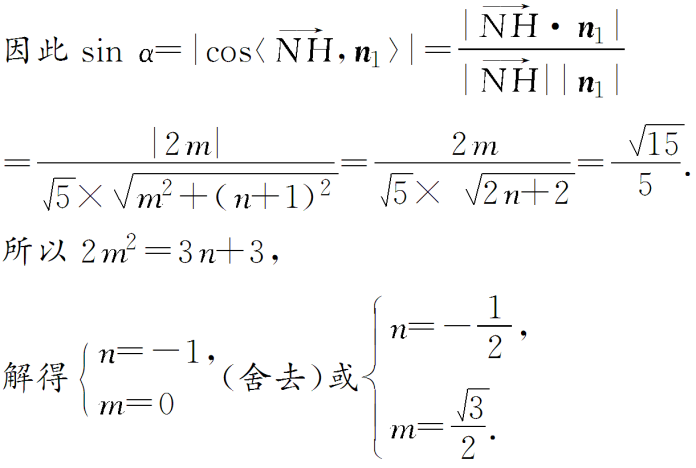
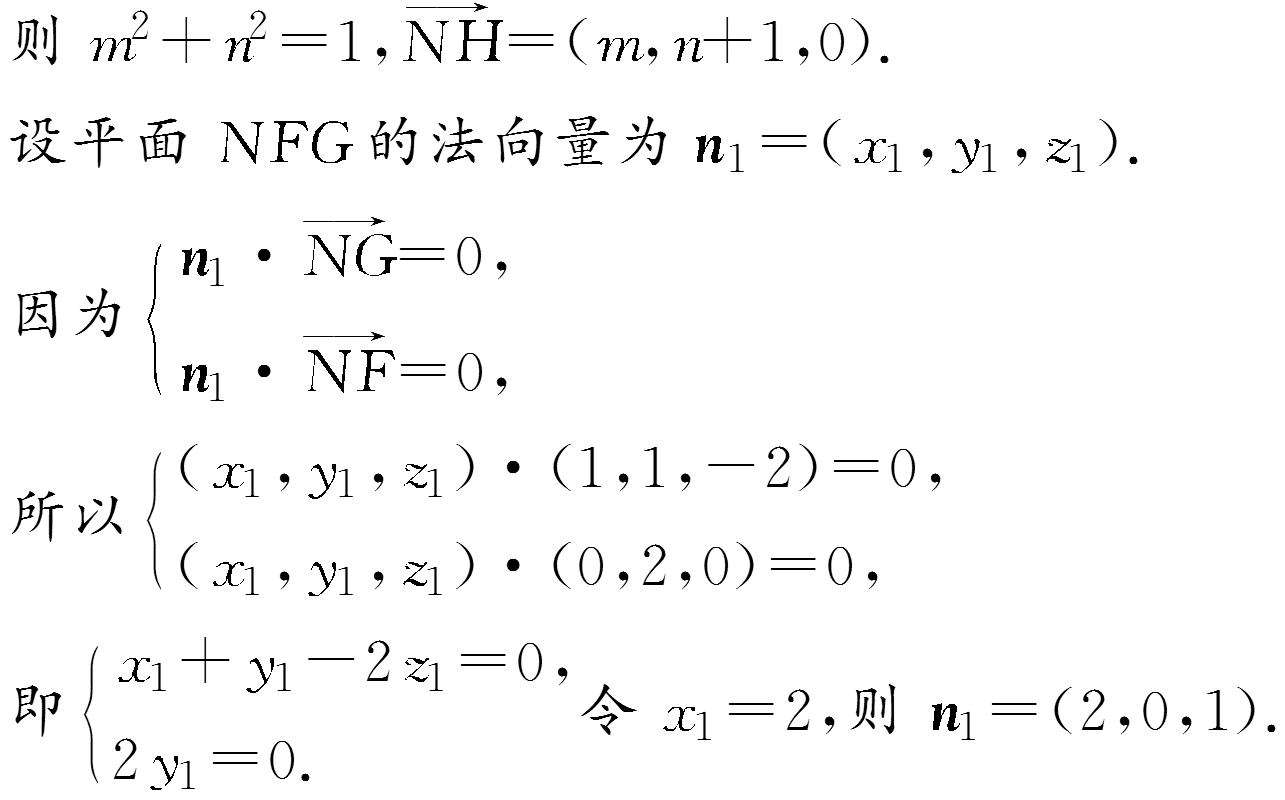
设平面*BFC*1的法向量为*n*＝(*x*，*y*，*z*)，则

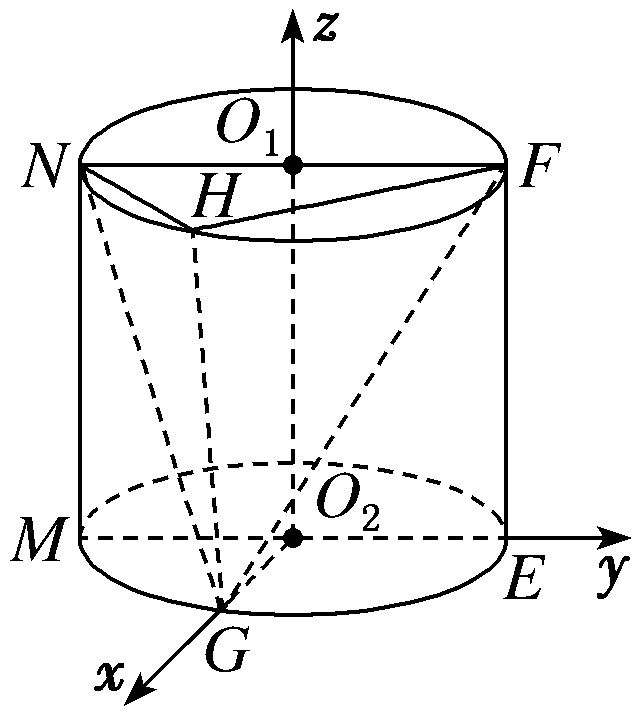
令*z*＝，则*n*＝(4*m*－2，－2，)．∵＝＝(，1,0)，直线*A*1*C*1与平面*BFC*1所成角的正弦值为，∴＝，解得*m*＝，∴的值为.

5.[证明]　(1)因为平面*FNH*⊥平面*NHG*，平面*FNH*∩平面*NHG*＝*NH*，又*NH*⊥*FH*，*FH*⊂平面*FHN*，

所以*FH*⊥平面*NHG*，又*NG*⊂平面*NHG*，所以*FH*⊥*NG*.

(2)以点*O*2为坐标原点，分别以*O*2*G*，*O*2*E*，*O*2*O*1所在直线为*x*轴、*y*轴、*z*轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则*N*(0，－1,2)，*G*(1,0,0)，*F*(0,1,2)．设

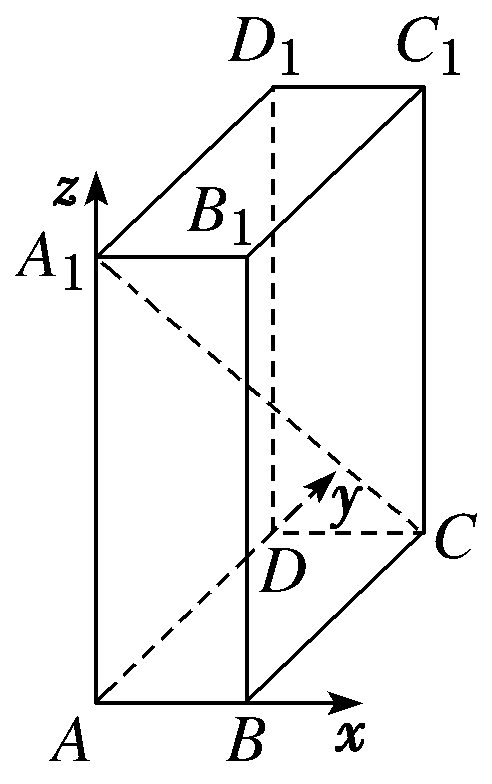


*H*(*m*，*n,*2)(由图知*m*>0)，令*x*2＝1，即*n*2＝.设平面*NHG*与平面*MNFE*的夹角为*θ*.因为平面*MNFE*的一个法向量*n*3＝(1,0,0)，

所以cos *θ*＝＝<，

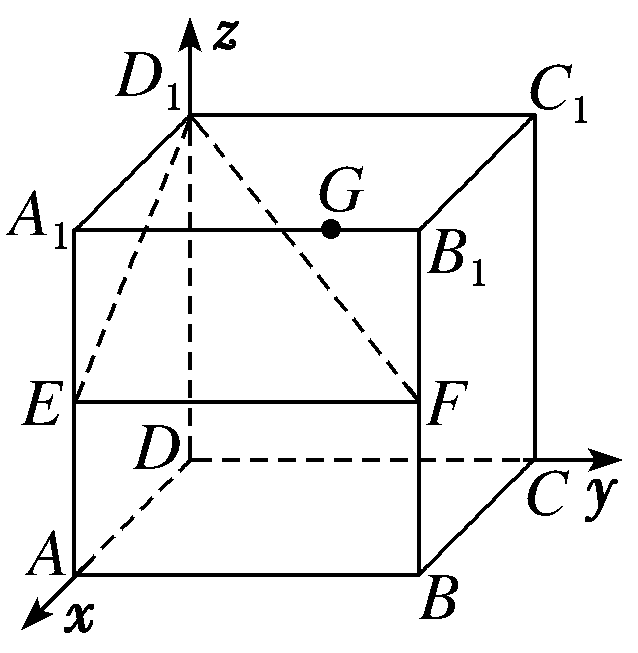
所以平面*NHG*与平面*MNFE*的夹角大于.

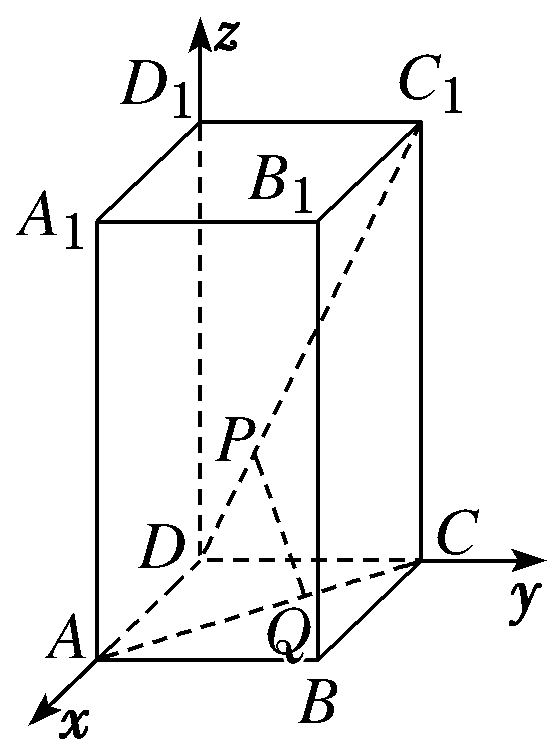
**三、空间距离**

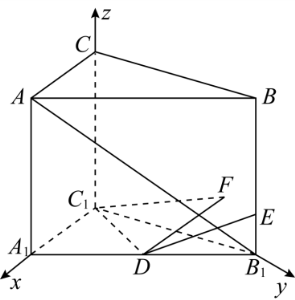
1.解析：选B　过点*B*作*BE*⊥*A*1*C*，垂足为*E*，设点*E*的坐标为(*x*，*y*，*z*)，

由题意知*A*1(0,0,3)，*B*(1,0,0)，*C*(1,2,0)，故＝(1,2，－3)，＝(0,2,0)，

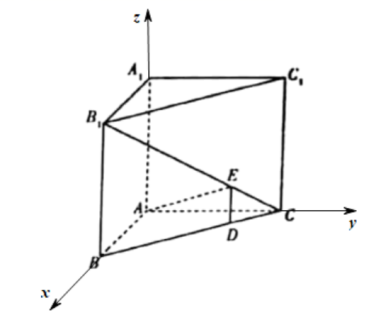
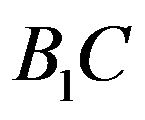
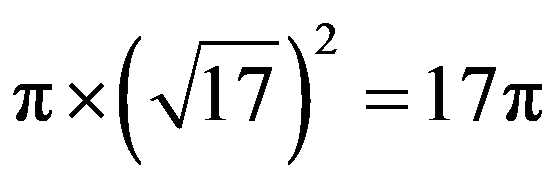
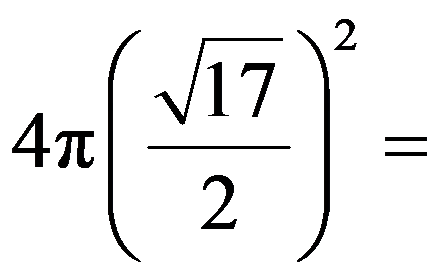
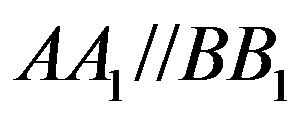
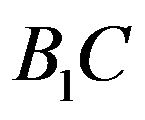
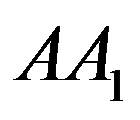
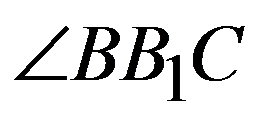
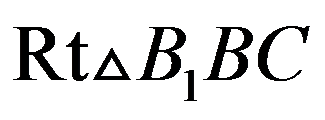
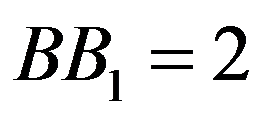
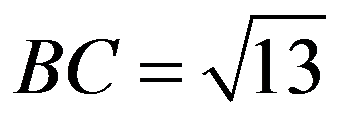
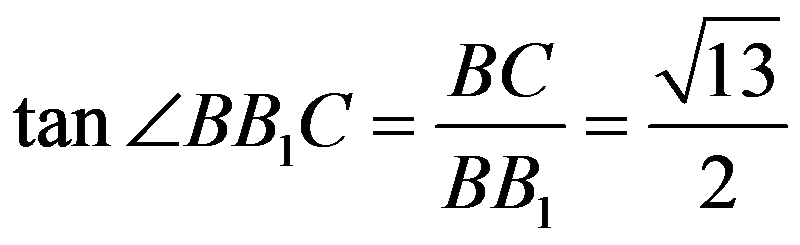
对应的单位向量*u*＝，所以点*B*到*A*1*C*的距离为＝ ＝.

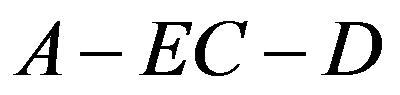
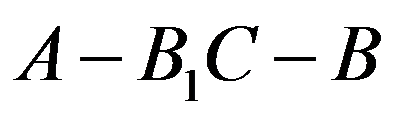
2.解析：选D　面*D*1*EF*的法向量为*n*＝(*x*，*y*，*z*)，则令*x*＝1，得*n*＝(1,0,2)，则平面*D*1*EF*的一个法向量为(1,0,2)，∴点*G*到平面*D*1*EF*的距离为＝＝.故选D.

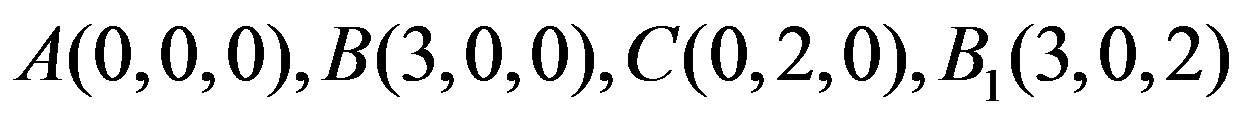
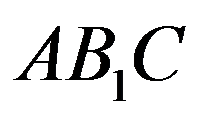
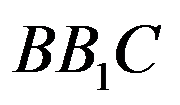
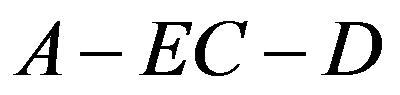
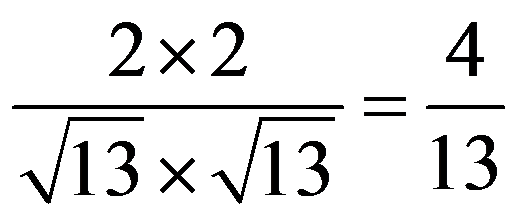
3.解析：选C　 4．解析：C　以*D*为坐标原点，*DA*，*DC*，*DD*1所在直线分别为*x*轴、*y*轴、*z*轴建立如图所示的空间直角坐标系，则*A*(2,0,0)，*C*(0,2,0)，*C*1(0,2,4)，则可设*P*(0，*t,*2*t*)，*t*∈[0,2]，*Q*(2－*m*，*m,*0)，*m*∈[0,2]，∴*PQ*＝＝，当且仅当5*t*＝*m*＝时，*PQ*取得最小值，故选C.

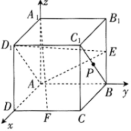
5.【答案】*A*解：取上靠近的四等分点为*E*，连接*DE*，当点*F*在*DE*上时，平面，证明如下：因为直三棱柱中，侧棱长为2，，，点*D*是的中点，所以平面，所以．以为坐标原点，，，分别为*x*轴，*y*轴，*z*轴建立空间直角坐标系，所以0，，1，，，1，，即1，，，此时，即．又，*DE*，平面，所以平面，故当*F*在*DE*上时，平面，很明显，当*E*，*F*重合时，线段最长，此时．选*A*．

**四、综合题**

1.【答案】*AD*解： *B*项，是三棱柱外接球的直径，所以三棱柱外接球的表面积为，所以*B*项错误；因为，所以异面直线与所成角为．在中，，，所以，所以*C*项错误；

二面角即二面角，以*A*为坐标原点，以，，的方向分别为*x*，*y*，*z*轴的正方向建立空间直角坐标系，

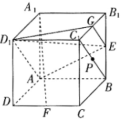
如图，则，，，，设平面的法向量，得；设平面的一个法向量为，得，故二面角的余弦值为，所以*D*项正确．故选*AD*．

2.【答案】*AB*解：对于*A*，以*A*为坐标原点建立空间坐标系，如图所示：

，则0，，4，，2，，，

，，又，、平面，

平面，故*A*正确

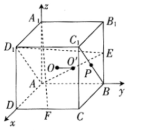
对于*B*，如图取是我中点为*G*，连接，*GE*，则且，

可知 ，，，，*G*，*E*共面，等腰梯形即为截面，

截面梯形的面积为，故*B*正确

对于*C*，在正方体中，， 平面， 平面，

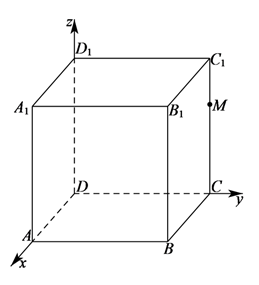
对于*D*，设外接球的球心为*O*，过*O*作，垂足为，

则为圆心，为半径的圆是过*AE*面积最小的截面圆，

则2，，设，，4，，

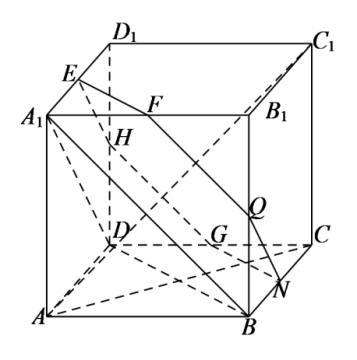
，解得，则

故截面圆的最小面积为 ，故*D*错误．故选：*AB*．

3.【答案】*AC*解：对于*A*选项，以点*D*为坐标原点，*DA* 、*DC* 、所在直线分别为*x* 、*y* 、*z*轴建立空间直角坐标系，则点、、设点，平面，则为平面的一个法向量，且，，，故*A*选项正确；

对于*B*选项，，周长为．

正六边形*EFQNGH* 的周长为，面积为，

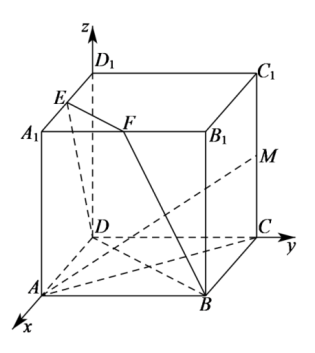
则的面积小于正六边形*EFQNGH* 的面积，它们的周长相等，*B*选项错误；

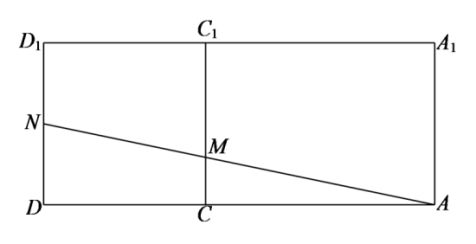
对于*C*选项，设平面交棱于点，点，，

平面，平面，，即，得，

，所以，点*E* 为棱的中点，

同理可知，点*F* 为棱的中点，则，，而，

，∴EF{ \rm{ / } }{ \rm{ / } }DB 且，由空间中两点间的距离公式可得，，，所以，四边形*BDEF* 为等腰梯形，*C*选项正确；

对于*D*选项，将矩形与矩形延展为一个平面，如下图所示：若最短，则*A* 、*M* 、*N* 三点共线，\because CC_{ 1 } { \rm{ / } }{ \rm{ / } }DD_{ 1 } ，，，所以，点*M*不是棱的中点，*D*选项错误．故选*AC*．

4.【答案】*ACD*解：对于*A*，当时，三棱锥的体积等于三棱锥的体积，因为面，所以*E*到面的距离为定值，可得三棱锥的体积为定值，故*A*正确；对于*B*，当时，*F*为*BC*的中点，在正方体中，易得平面，

平面，则，所以不可能有，则不存在使得平面，*B*错；对于*C*，当时，*E*为线段*AB*的中点，则点*A*，*B*到平面的距离相等，故*C*正确；

对于*D*，以*D*为原点，*DA*、*DC*、所在直线分别为*x*轴、*y*轴、*z*轴建立空间直角坐标系，

则0，，1，，设，则*m*，，1，，从而1，，，，，故*D*正确；故选：*ACD*．

**【利用空间向量解决探索性问题】**

5.解：如图，以A为原点建立空间直角坐标系，则A1（0，0，1），B1（1，0，1）， M（0，1，），N（，0） ，，

C

（1）∵，∴

A1

C1

B1

M

B

A

P

*x*

*y*

*z*

∴无论取何值，AM⊥PN

（2）∵（0，0，1）是平面ABC的一个法向量。

∴sinθ=|cos<|=

∴当＝时，θ取得最大值，此时sinθ=,cosθ=,tanθ=2

N

答：当＝时，θ取得最大值，此时tanθ=2

（3）设存在，，设是平面PMN的一个法向量。

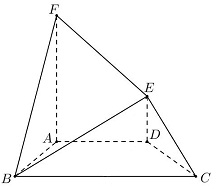
则得令x=3，得y=1+2,z=2-2

∴

∴|cos<>|=化简得4

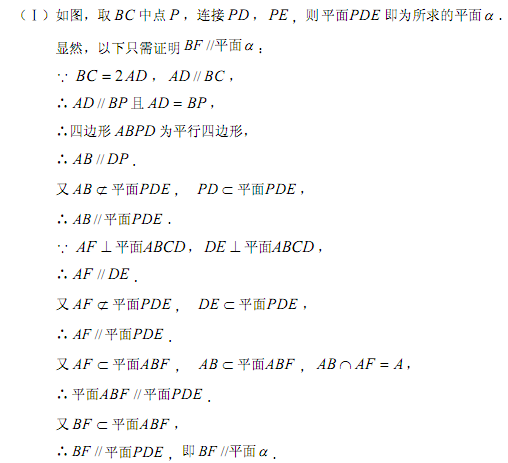
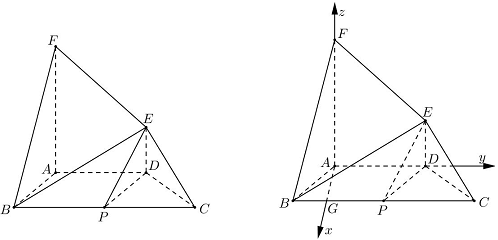
∵△＝100-4413＝-108<0；∴方程（\*）无解

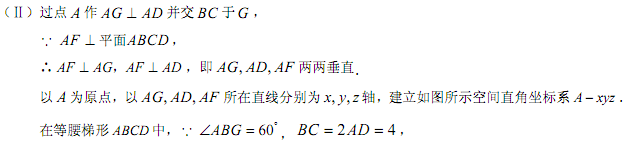
∴不存在点P使得平面PMN与平面ABC所成的二面角为30º

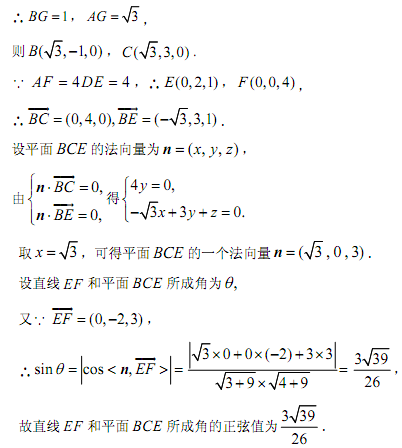


**【立体几何中的作图问题】**

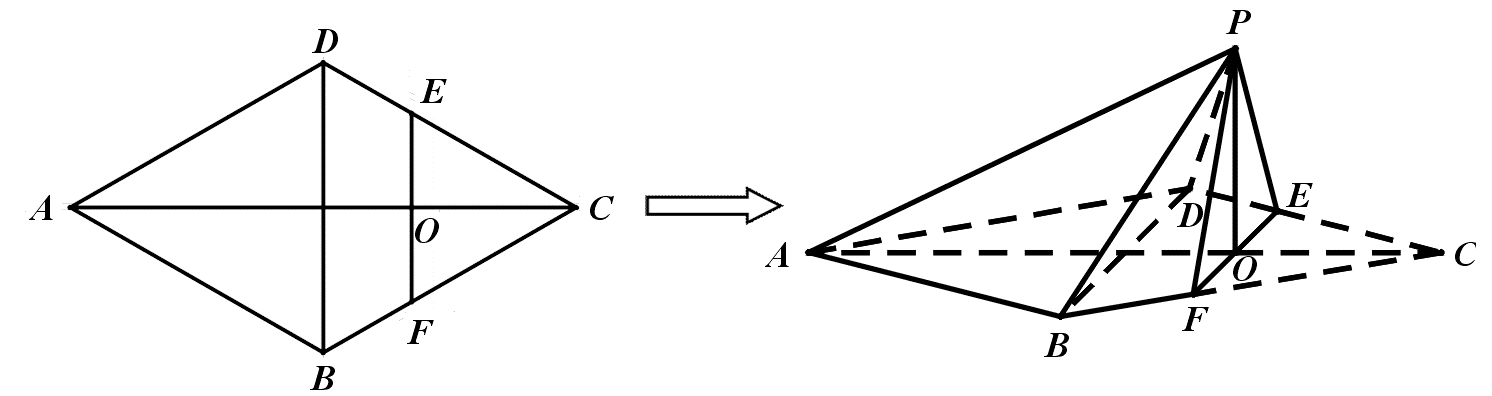
6.







**【翻折问题（平面-立体）、最值问题】**



7．（Ⅰ）证明：∵　菱形的对角线互相垂直，∴，∴，

∵ ，∴．

∵　平面⊥平面，平面平面，且平面，

∴　平面, ∵ 平面，∴　.

∵ ，∴　平面.

（Ⅱ）如图，以为原点，建立空间直角坐标系.

（ⅰ）设 因为，所以为等边三角形，

故，.又设，则，.

所以，，，故 ，

所以，

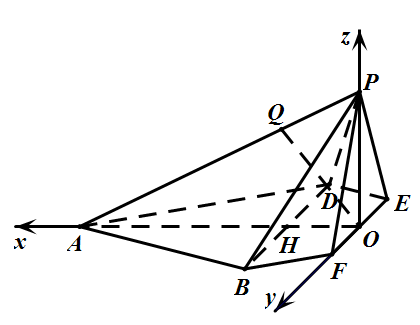
当时，. 此时，

由（Ⅰ）知，平面

所以.

（ⅱ）设点的坐标为，

由（i）知，，则，，，.

所以，，

∵，

∴． ∴， ∴．

设平面的法向量为，则．

∵，，∴　，

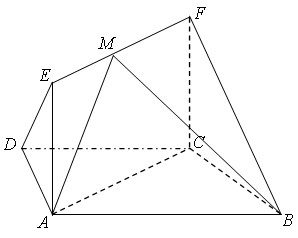
取，解得：， 所以.

设直线与平面所成的角，

∴．

又∵∴．∵，∴．

因此直线与平面所成的角大于，即结论成立．

**【动点、取值范围】**

8.（I）证明：在梯形中，

∵ ,，

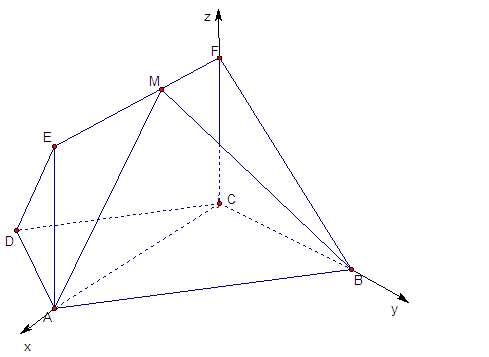
∠＝，∴ 

∴ 

∴  ∴　⊥

∵ 平面⊥平面,平面∩平面,平面

∴ ⊥平面 …………………6分

（II）学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！解法一：由（I）可建立分别以直线为的如图所示空间直角坐标系，令，则，

∴  …………8分

设为平面MAB的一个法向量，

由得

取，则，…………10分

∵　是平面FCB的一个法向量

∴　………12分

∵  ∴　当时，有最学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！小值，

当时，有最大值。 ∴ …………………14分

**2021-2022学年第一学期期末高二数学复习专题**

**（立体几何与空间向量）**

**【知识梳理】**

一、空间向量的概念及运算：空间向量可以看作是平面向量的推广，有许多概念和运算与平面向量是相同的，如模、零向量、单位向量、相等向量、相反向量等概念，加法的三角形法则和平行四边形法则，减法的几何意义，数乘运算与向量共线的判断、数量积运算、夹角公式、求模公式等等；向量的基底表示和坐标表示是向量运算的基础．

1.向量数量积的应用技巧

(1)求夹角：设向量a，b所成的角为θ，则cos θ＝，进而可求两异面直线所成的角．

(2)求长度(距离)：运用公式|a|2＝a·a，可将线段长度的计算问题转化为向量数量积的计算问题．

[提醒]　求向量夹角，必须特别关注两向量的方向，注意向量夹角与异面直线所成角的区别．

2.用基底表示任一向量的方法

(1)线性运算法：用基底表示空间向量，一般要用到向量的加法、减法、数乘的运算法则，尤其是向量加法的平行四边形法则，向量加法、减法的三角形法则及向量的一些代数运算，将所求向量逐步向基向量过渡，直到全部用基向量表示．

(2)待定系数法：利用待定系数法解决有关问题时，先利用未知系数确定向量的线性表示，再根据空间向量基本定理建立对应系数之间的关系，将问题转化为方程(组)问题求解．

3.利用向量数量积判断或证明线线、线面垂直的思路

(1)由数量积的性质a⊥b⇔a·b＝0(a，b≠0)可知，要证两直线垂直，可分别构造与两直线平行的向量，只要证明这两个向量的数量积为0即可．

(2)用向量法证明线面垂直，离不开线面垂直的判定定理，需将线面垂直转化为线线垂直，然后利用向量法证明线线垂直即可．

二、空间夹角及距离

1．距离：空间中的距离是立体几何的重要内容，其内容主要包括：点点距，点线距，点面距，线线距，线面距，面面距.其中重点是点点距、点线距、点面距以及两异面直线间的距离．求距离的重点在点到平面的距离，直线到平面的距离和两个平面的距离可以转化成点到平面的距离，一个点到平面的距离也可以转化成另外一个点到这个平面的距离.

求距离的一般方法和步骤：应用各种距离之间的转化关系和“平行移动”的思想方法，把所求的距离转化为点点距、点线距或点面距求之，其一般步骤是：①找出或作出表示有关距离的线段；②证明它符合定义；③归到解某个三角形．若表示距离的线段不容易找出或作出，可用体积等积法计算求之. 设斜线段向量***a***，平面的法向量***b***，则.

2．夹角：空间中的各种角包括异面直线所成的角，直线与平面所学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！成的角和二面角，要理解各种角的概念定义和取值范围，其范围依次为学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！0°，90°学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！、[0°，90°]和[0°，180°].

（1）两条异面直线所成的角

求法：①先通过其中一条直线或者两条直线的平移，找出这两条异面直线所成的角，然后通过解三角形去求得；②通过两条异面直线的方向量所成的角来求得，但是注意到异面直线所成角得范围是学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！，向量所成的角范围是学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！，如果求出的是钝角，要注意转化成相应的锐角.

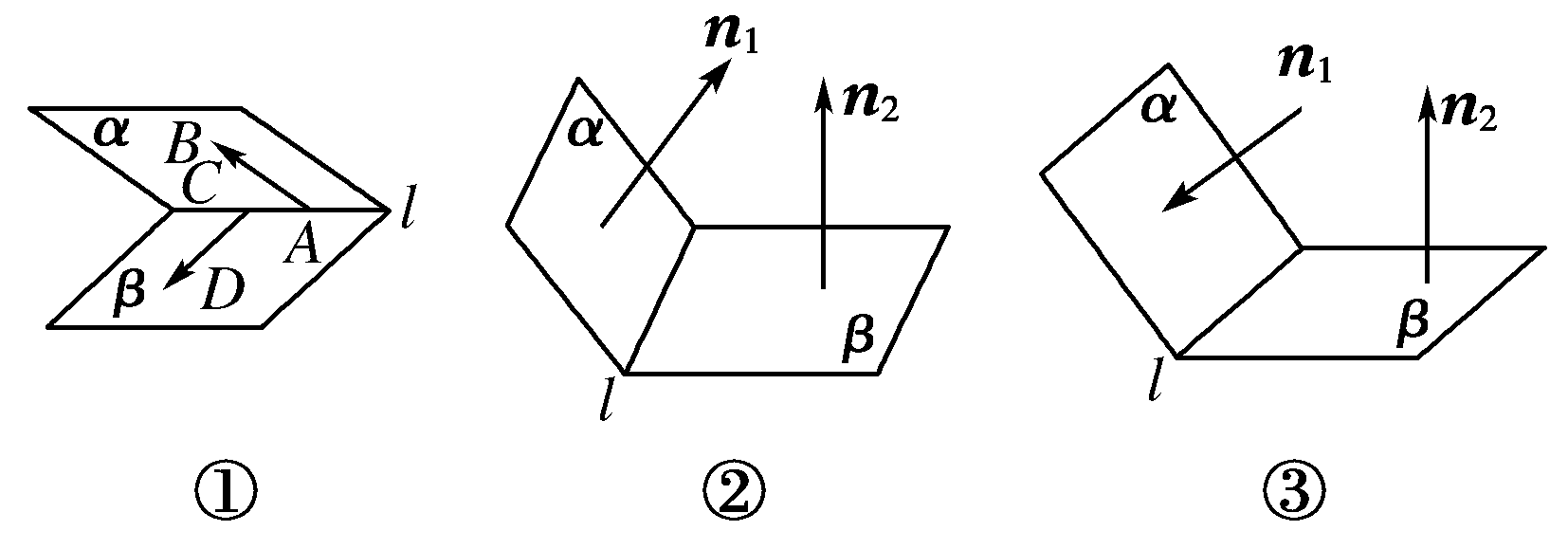
设两条异面直线*a*，*b*的方向向量为***a***，***b***，其夹角为*θ*，则cos *φ*＝|cos *θ*|＝(其中*φ*为异面直线*a*，*b*所成的角)．

（2）直线和平面所成的角：求法：“一找二证三求”，三步都必须要清楚地写出来.除特殊位置外，主要是指平面的斜线与平面所成的角，根据定义采用“射影转化法”.

设直线*l*的方向向量为***e***，平面*α*的法向量为***n***，直线*l*与平面*α*所成的角为*φ*，两向量***e***与***n***的夹角为*θ*，则有sin *φ*＝|cos *θ*|＝.

（3）二面角的度量是通过其平面角来实现的

解决二面角的问题往往是从作出其平面角的图形入手，所以作二面角的平面角就成为解题的关键.通常的作法有：（Ⅰ）定义法；（Ⅱ）利用三垂线定理或逆定理；（Ⅲ）自空间一点作棱垂直的垂面，截二面角得两条射线所成的角，俗称垂面法．此外，当作二面角的平面角有困难时，可用射影面积法解之，cos α＝学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！，其中*S* 为斜面面积，*S*′为射影面积，α为斜面与射影面所成的二面角. 求二面角的大小：①如图①，*AB*，*CD*是二面角*α*－*l*－*β*的两个面内与棱*l*垂直的直线，则二面角的大小*θ*＝〈，〉．



②如图②③，***n***1，***n***2分别是二面角*α*－*l*－*β*的两个半平面*α*，*β*的法向量，则二面角的大小*θ*＝〈***n***1，***n***2〉(或π－〈***n***1，***n***2〉)．

利用平面的法向量求二面角的大小时，二面角是锐角或钝角由图形决定．由图形知二面角是锐角时cos *θ*＝；由图形知二面角是钝角时，cos *θ*＝－.当图形不能确定时，要根据向学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试题试卷、教案、课件、教学论文、素材等各类教学资源库下载，还有大量丰富的教学资讯！量坐标在图形中观察法向量的方向，从而确定二面角与向量***n***1，***n***2的夹角是相等(一个平面的法向量指向二面角的内部，另一个平面的法向量指向二面角的外部)，还是互补(两个法向量同时指向二面角的内部或外部)．

【典例精讲】

一、空间向量的有关概念与运算

1.已知平面内两向量1，，2，，若为平面的法向量且，则*m*，*n*的值分别为

A. ，2 B. 1， C. 1，2 D. ，

【答案】*A*

【解析】本题考查空间向量的数量积运算，平面法向量的定义，属基础题．

首先用*m*，*n*表示，由为平面的法向量，得到，进而由数量积的坐标运算得解．

解：，，，

，

又，是平面内的两向量，为平面的法向量，

，解得．故选*A*．

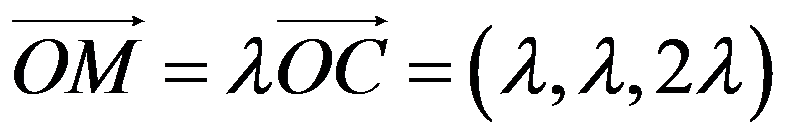
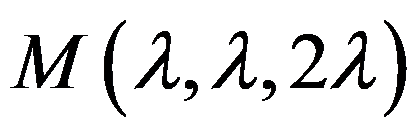
2.已知点*M*在直线*OC*上运动当取最小值时，点*M*的坐标为

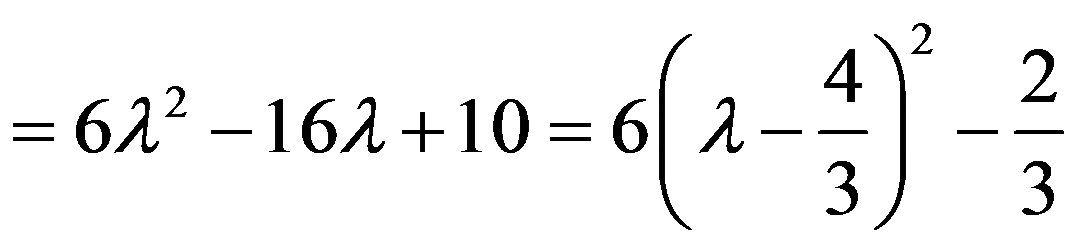
A. B. C. D.

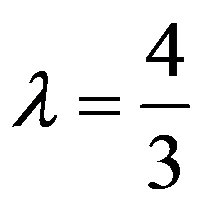
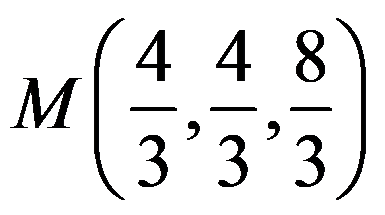
【答案】*D*

【分析】本题主要考查了空间向量的共线定理及数量积运算，解题的关键是由点*M*在直线*OC*上得*M*的坐标．

可先设，由点*M*在直线*OC*上可得，则由向量的数量积的坐标表示可得，根据二次函数的性质可求，取得最小值时的，进而可求*M*的坐标．

解：设，即，故，

，

当时，向量数量积有最小值，此时．故选*D*．

3.下面命题正确的个数是

若，则与，共面；若\overrightarrow{{\rm MP}\;}=2\overrightarrow{MA}{\rm +}3\overrightarrow{MB}，则共面；

若\overrightarrow{{\rm OA}\;}+\overrightarrow{OB} +\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}{\rm =}\overrightarrow{0}，则共面；

若\overrightarrow{{\rm OP}}{\rm =} \dfrac{1}{2}\overrightarrow{{\rm OA}}{\rm +} \dfrac{5}{6}\overrightarrow{{\rm OB}}{\rm -} \dfrac{1}{3}\overrightarrow{{\rm OC}}\;，则共面；

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

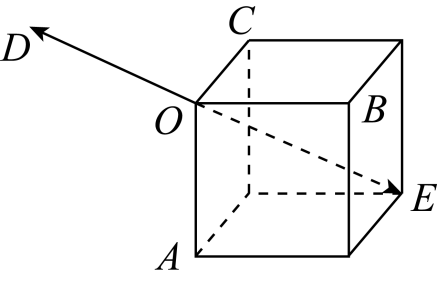
【答案】*C*

【解析】本题考查了向量共面的定理的应用，属于中档题．根据空间向量共面定理，结合图形解决即可．

解：由空间向量共面定理可得，若，则与，共面，此命题正确；

由空间向量共面定理得：若\overrightarrow{{\rm MP}\;}=2\overrightarrow{MA}{\rm +}3\overrightarrow{MB}，则共面，此命题正确；

如图，在正方体中，，

若\overrightarrow{{\rm OA}\;}+\overrightarrow{OB} +\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}{\rm =}\overrightarrow{0}，则显然此时不共面，此命题错误；

若\overrightarrow{{\rm OP}}{\rm =} \dfrac{1}{2}\overrightarrow{{\rm OA}}{\rm +} \dfrac{5}{6}\overrightarrow{{\rm OB}}{\rm -} \dfrac{1}{3}\overrightarrow{{\rm OC}}\;，∴\overrightarrow{{\rm OP}}= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{{\rm OP}}+\overrightarrow{{\rm PA}})+ \dfrac{5}{6}(\overrightarrow{{\rm OP}}+\overrightarrow{{\rm PB}})- \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{{\rm OP}}+\overrightarrow{{\rm PC}})，，

则共面，此命题正确．故选*C*．

4.（多选）设是空间的一组基底，则下列结论正确的是

A. 可以为任意向量；B. 对空间任一向量，存在唯一有序实数组*y*，，使

C. 若，，则；D. 可以作为构成空间的一组基底

【答案】*BD*

【解析】本题考查了空间向量的基本定理及应用，共线与共面向量定理及应用和空间向量的加减运算及数乘运算，属于中档题．

利用基底的概念对*A*进行判断，再利用空间向量的基本定理对*B*进行判断，利用空间向量的坐标运算，令对*C*进行判断，再利用共面向量定理和空间向量的基本定理，结合空间向量的加减运算及数乘运算，对*D*进行判断，从而得结论．

解：\{ \overrightarrow{a}{\rm ,}\overrightarrow{b}{\rm ,}\overrightarrow{c} \}是空间的一组基底．对于*A*、\overrightarrow{a}{\rm ,}\overrightarrow{b}{\rm ,}\overrightarrow{c}是不共面的三个向量，因此*A*不正确；

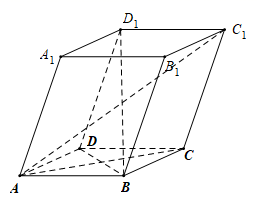
对于*B*、对空间任一向量，存在唯一有序实数组*y*，，使\overrightarrow{p}{\rm =}x\overrightarrow{a}{\rm +}y\overrightarrow{b}{\rm +}z\overrightarrow{c}，因此*B*正确；

对于*C*、比如，满足，\overrightarrow{b}{\rm ⊥}\overrightarrow{c}，但与不垂直，因此*C*不正确；

对于*D*、设\overrightarrow{a}{\rm +}2\overrightarrow{b}=x\left(\overrightarrow{b}{\rm +}2\overrightarrow{c}\right)+y\left(\overrightarrow{c}{\rm +}2\overrightarrow{a}\right)\left(x,y∈R\right)，

则\overrightarrow{a}{\rm +}2\overrightarrow{b}=x\left(\overrightarrow{b}{\rm +}2\overrightarrow{c}\right)+y\left(\overrightarrow{c}{\rm +}2\overrightarrow{a}\right)=2y\overrightarrow{a}+x\overrightarrow{b}+\left(2x+y\right)\overrightarrow{c}，因此，无解，

因此\overrightarrow{a}{\rm +}2\overrightarrow{b}，\overrightarrow{b}{\rm +}2\overrightarrow{c}，\overrightarrow{c}{\rm +}2\overrightarrow{a}不共面，

所以\{ \overrightarrow{a}{\rm +}2\overrightarrow{b} , \overrightarrow{b}{\rm +}2\overrightarrow{c} , \overrightarrow{c}{\rm +}2\overrightarrow{a} \}可以作为构成空间的一组基底，因此*D*正确．

故选*BD*．

5.（多选）如图，一个结晶体的形状为平行六面体，其中，以顶点*A*为端点的三条棱长均为6，且它们彼此的夹角都是，下列说法中不正确的是

A. B.

C. 向量与的夹角是 D. 与*AC*所成角的余弦值为

【答案】*ACD*

【分析】本题考查利用空间向量求长度、夹角、判断垂直等应用，考查空间向量的基本定理，属于中档题．应用空间向量的基本定理，选取向量为基底，

由图可知：，利用即可判断

将用基底表示出来，再利用数量积的运算求解即可判断

由几何体的性质得出夹角即可判断由数量积的运算及夹角公式可判断*D*．

解：因为以顶点*A*为端点的三条棱长均为6，且它们彼此的夹角都是，

所以，

，则，所以*A*错误；

，所以*B*正确；

显然为等边三角形，则．

因为，且向量与的夹角是，所以与的夹角是，所以*C错误*；

因为，

所以，

，

所以，所以*D*错误．

故选*ACD*．

**6．**已知向量**a，b，*|*a*|*＝6，|b|＝8，〈a，b〉＝120°，**则**a**在**b**上的投影向量为\_**\_\_\_\_\_，*b*在*a***上的投影向量为\_\_\_**\_\_\_\_\_．**

解析：由题可得与向量a，b同方向的单位向量分别为，，|a|＝6，|b|＝8，〈a，b〉＝120°，根据投影向量的定义，则*a*在*b*上的投影向量为|a|cos〈a，b〉＝＝－b，b在a上的投影向量为|b|cos〈a，b〉＝＝－a.答案：－b　－a

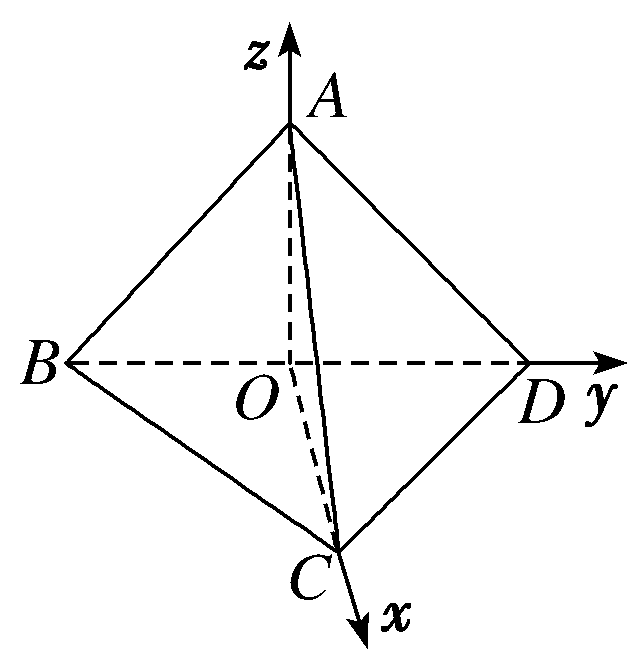
二、空间夹角

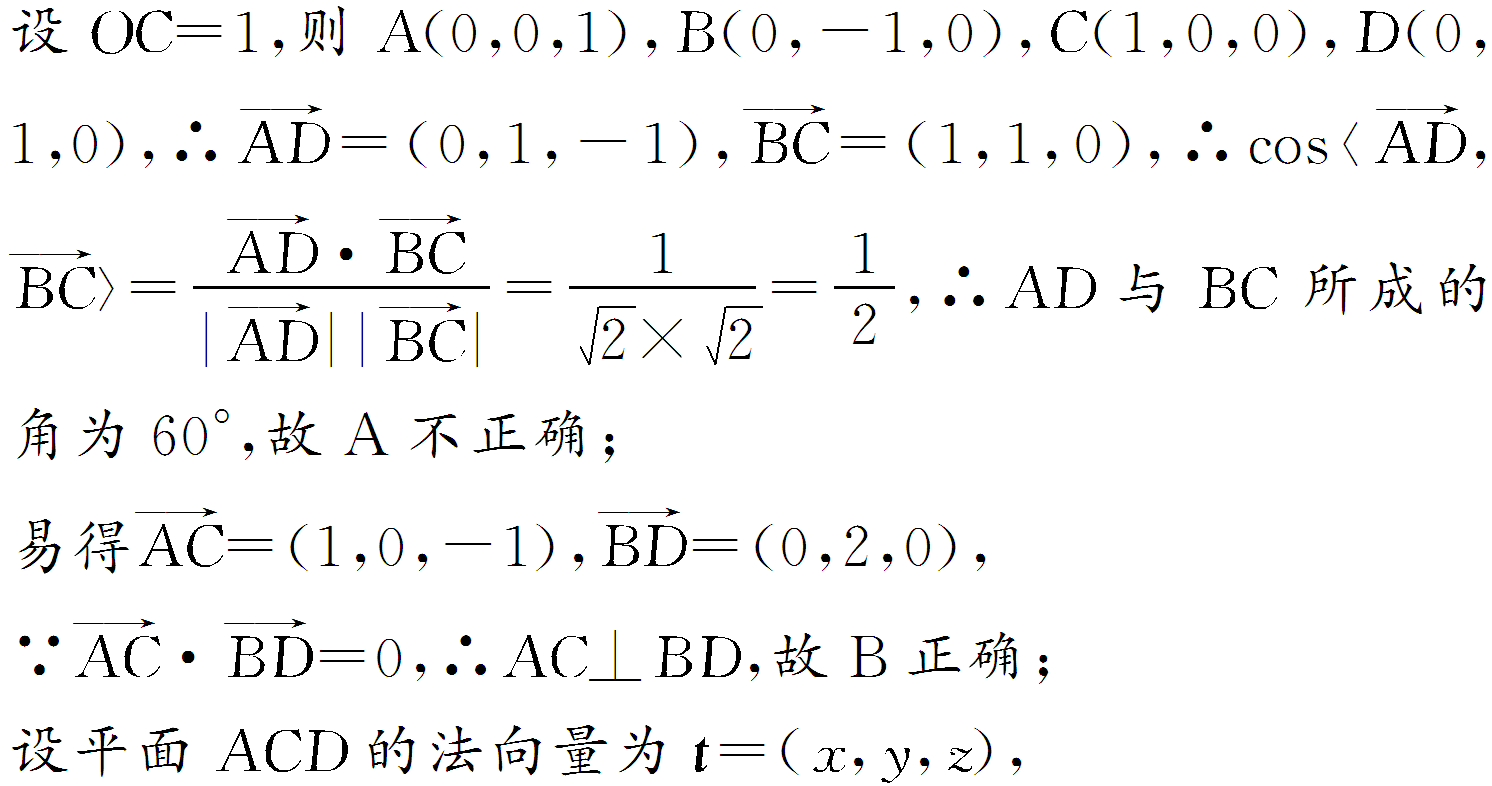
1．（多选）若将正方形*ABCD*沿对角线*BD*折成直二面角，则下列结论正确的有(　　)

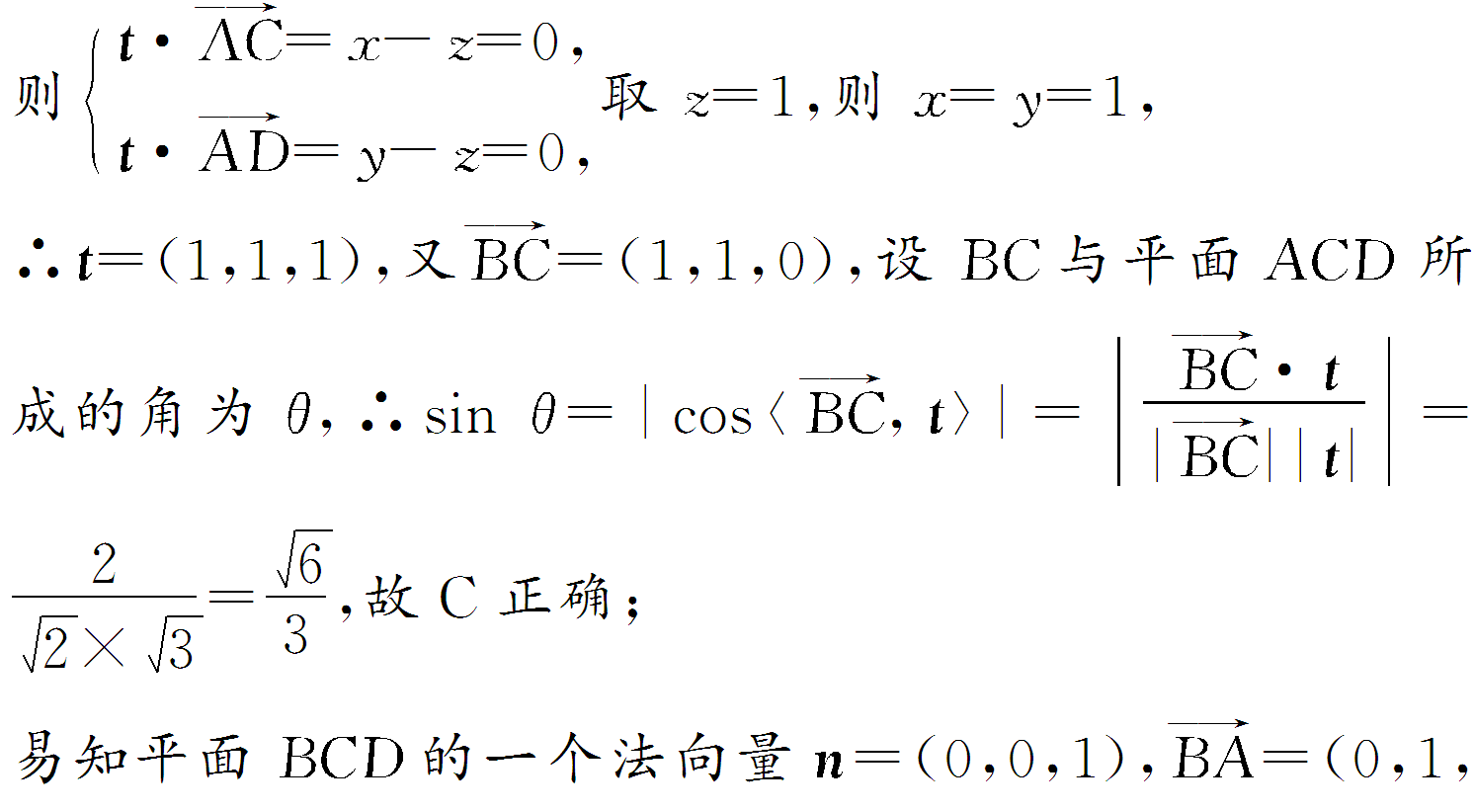
A．*AD*与*BC*所成的角为45°； B．*AC*与*BD*所成的角为90°

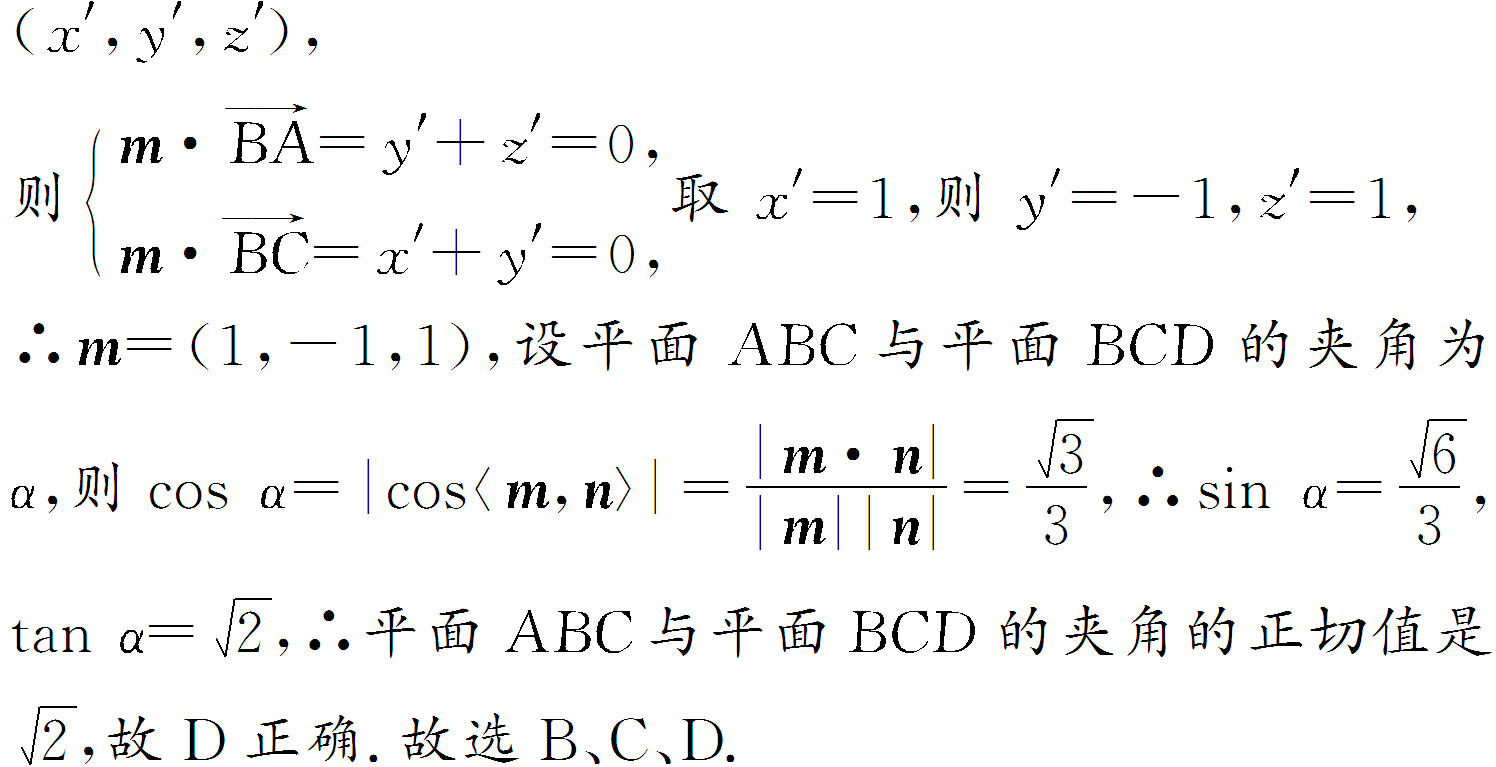
C．*BC*与平面*ACD*所成角的正弦值为； D．平面*ABC*与平面*BCD*的夹角的正切值是

解析：选BCD　取*BD*的中点*O*，连接*AO*，*CO*.若将正方形*ABCD*沿对角线*BD*折成直二面角，则*OA*⊥*BD*，*OC*⊥*BD*，*OA*⊥*OC*，

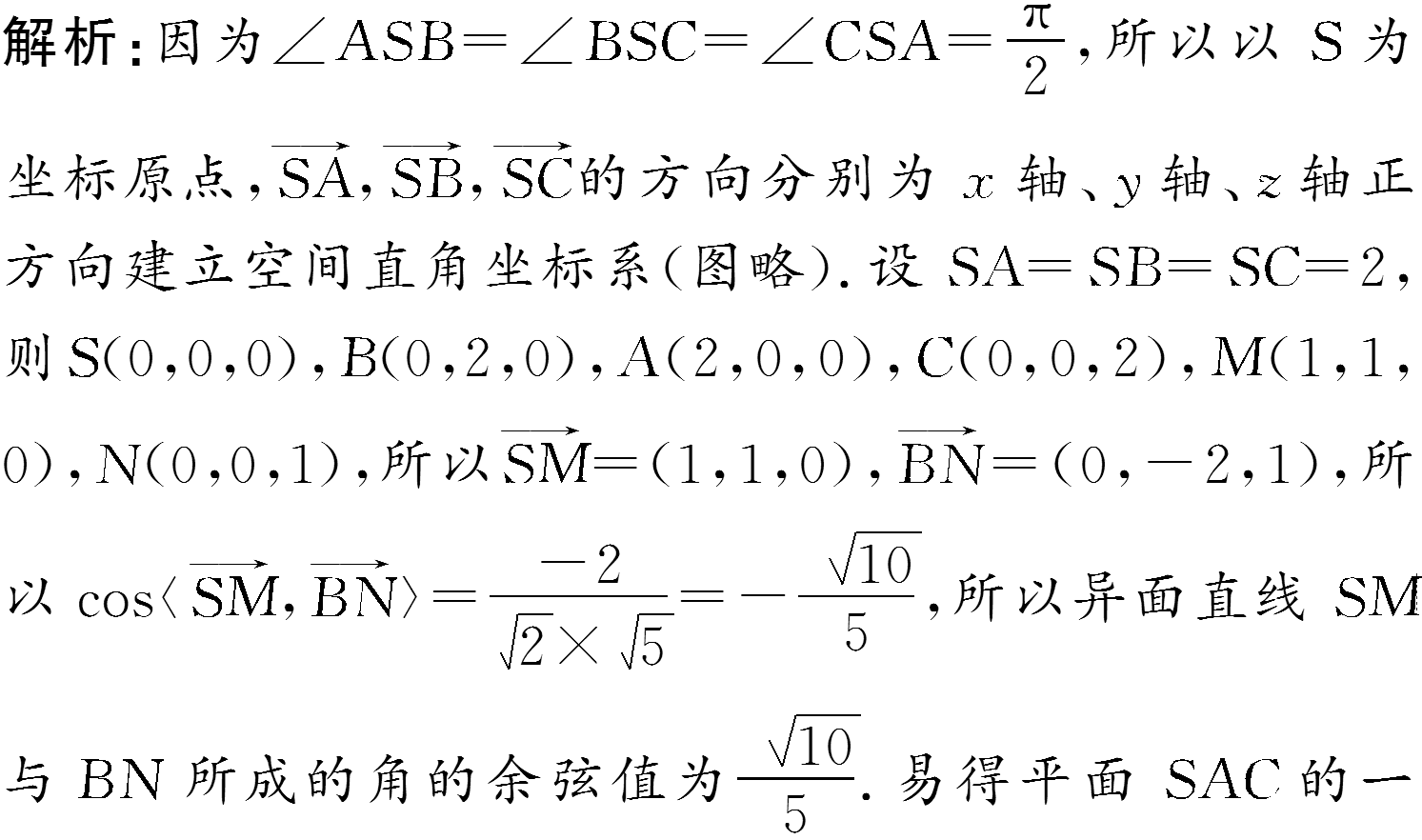
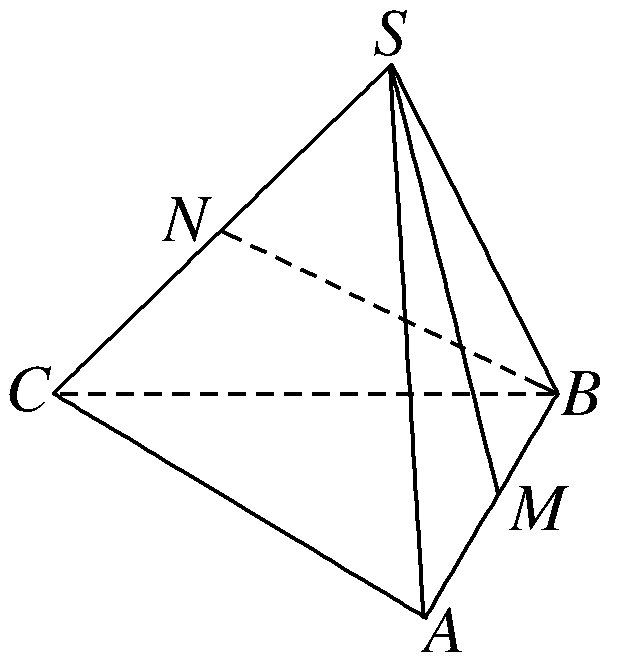
∴以*O*为原点，*OC*所在直线为*x*轴，*OD*所在直线为*y*轴，*OA*所在直线为*z*轴，建立如图所示的空间直角坐标系．

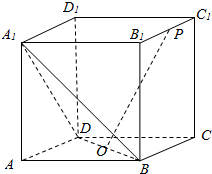
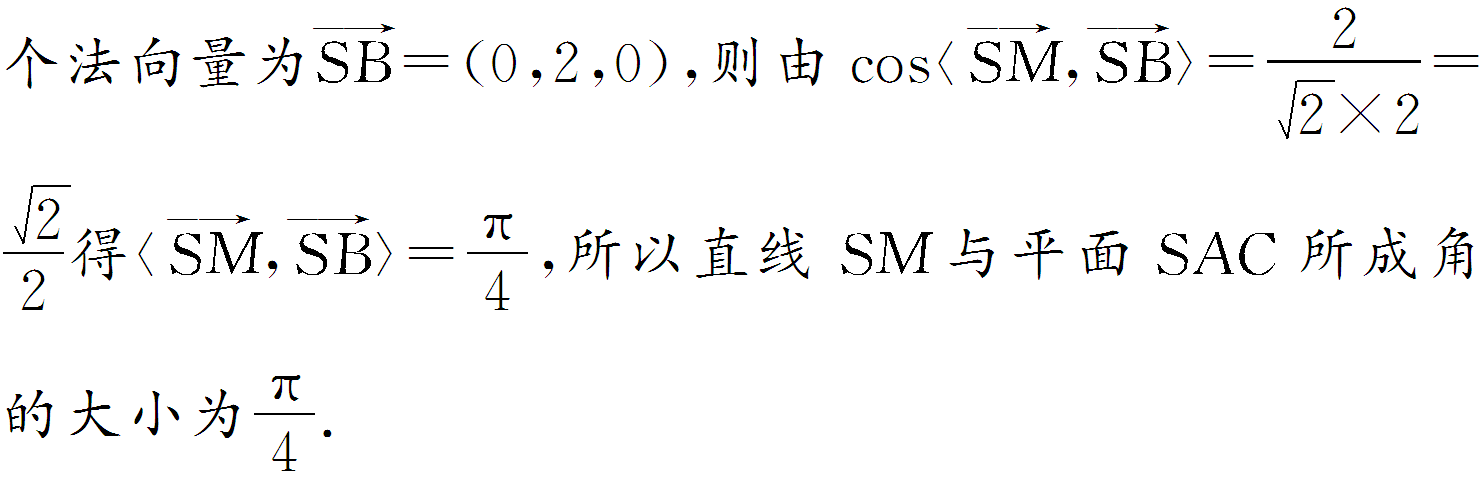
****

****

****

2.如图，在三棱锥*S*­*ABC*中，*SA*＝*SB*＝*SC*，且∠*ASB*＝∠*BSC*＝∠*CSA*＝，*M*，*N*分别是*AB*和*SC*的中点，则异面直线*SM*与*BN*所成角的余弦值为\_\_\_\_\_\_，直线*SM*与平面*SAC*所成角的大小为\_\_\_\_\_\_**．**



****答案：**

3.如图，在正方体中，点*O*为线段*BD*的中点．设点*P*在线段上，直线*OP*与平面所成的角为，则的取值范围是

*A. B. C. D.*

【答案】*C*

【解析】本题考查了直线与平面所成角，利用空间向量求线面夹角，求函数最值，属于拔高题．

先建立空间直角坐标系，得到，，\overrightarrow{{\rm OP}}=(a-1,1,2)，再求出平面的法向量，代入直线与平面夹角公式，即可求出的取值范围．

解：设正方体的棱长为2，以*D*为原点，*DA*所在直线为*x*轴，*DC*所在直线为*y*轴，所在直线为*z*轴，建立空间直角坐标系，则，，，，，，

，，，

设平面的法向量，则

取，得，

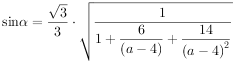
则，

对于，因为，则令，

则的对称轴为，故在上单调递减，

又在上单调递减，

根据复合函数的单调性可知，在上单调递增，

故在上单调递减，

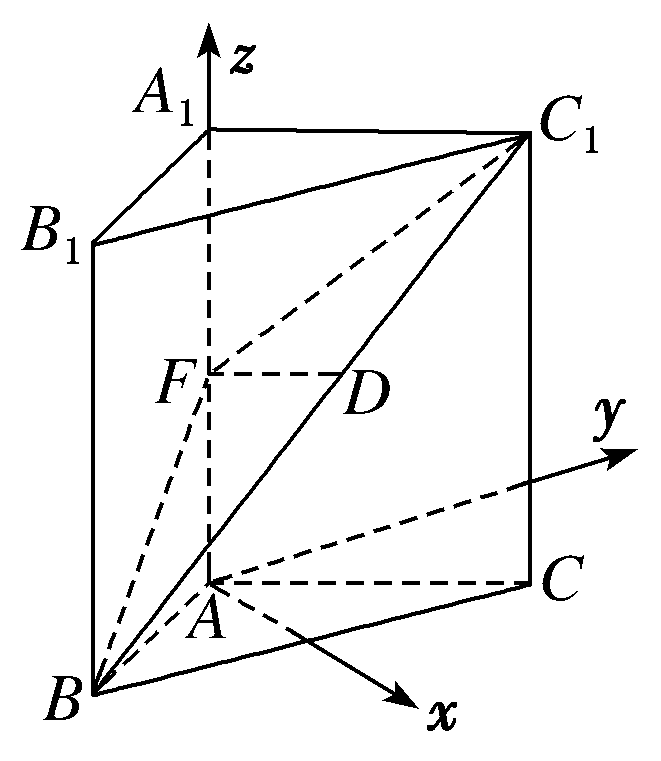
当时，取最小值为，当时，取最大值，

所以的取值范围是．故选*C*．

**4.如图，在直三棱柱*ABC*­*A*1*B*1*C*1中，*A*1*A*⊥平面*ABC*，∠*BAC*＝60°，*A*1*A*＝4，*AB*＝*AC*＝2.*F*为棱*AA*1上的动点，*D*是*BC*1上的点且*BD*＝*DC*1.**

**(1)若*DF*∥平面*ABC*，求的值；**

**(2)当的值为多少时，直线*A*1*C*1与平面*BFC*1所成角的正弦值为？**

**[解]　(1)如图，以*A*为原点，*BC*边上的高所在直线为*x*轴，平行于*BC*的直线为*y*轴，*AA*1所在直线为*z*轴，建立空间直角坐标系*Axyz*，**

**∵*A*1*A*＝4，∴*A*1(0,0,4)．**

**∵∠*BAC*＝60°，*AB*＝*AC*＝2，**

**∴*B*(，－1,0)，*C*(，1,0)，*C*1(，1，4)．**

**∵*D*是*BC*1上的点且*BD*＝*DC*1，∴*D*(，0,2)．**

**设＝*λ*，则*F*(0,0,4*λ*)，∴＝(－，0,4*λ*－2)，**

**∵*DF*∥平面*ABC*，平面*ABC*的一个法向量为(0,0,1)，**

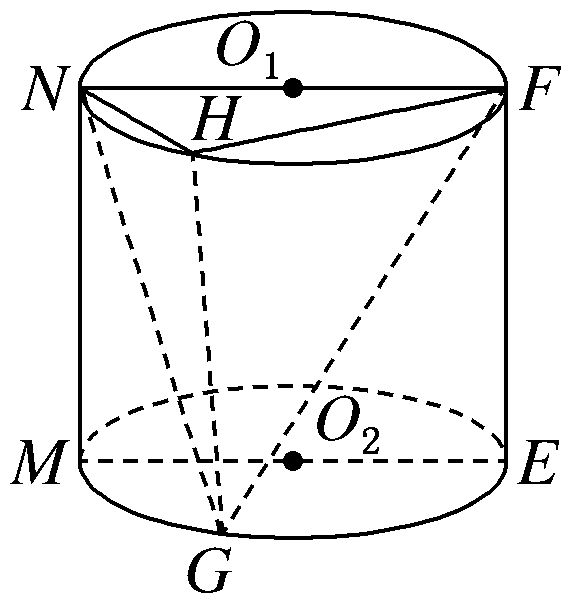
**∴4*λ*－2＝0，即*λ*＝，∴的值为1.**

**(2)设＝*m AA*1，则*F*(0,0,4*m*)，＝(－，1,4*m*)，＝(0,2,4)．**

**设平面*BFC*1的法向量为*n*＝(*x*，*y*，*z*)，则**

**令*z*＝，则*n*＝(4*m*－2，－2，)．**

**∵＝＝(，1,0)，直线*A*1*C*1与平面*BFC*1所成角的正弦值为，∴＝，解得*m*＝，∴的值为.**

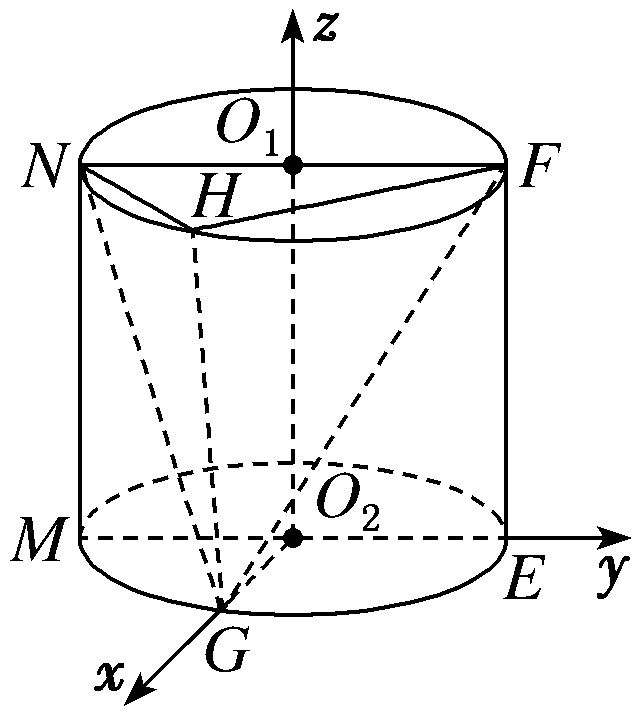
**5.如图，在圆柱*W*中，点*O*1，*O*2分别为上、下底面的圆心，平面*MNFE*是轴截面，点*H*在上底面圆周上(异于点*N*，*F*)，点*G*为下底面圆弧*ME*的中点，点*H*与点*G*在平面*MNFE*的同侧，圆柱*W*的底面半径为1，高为2.**

**(1)若平面*FNH*⊥平面*NHG*，求证：*NG*⊥*FH*；**

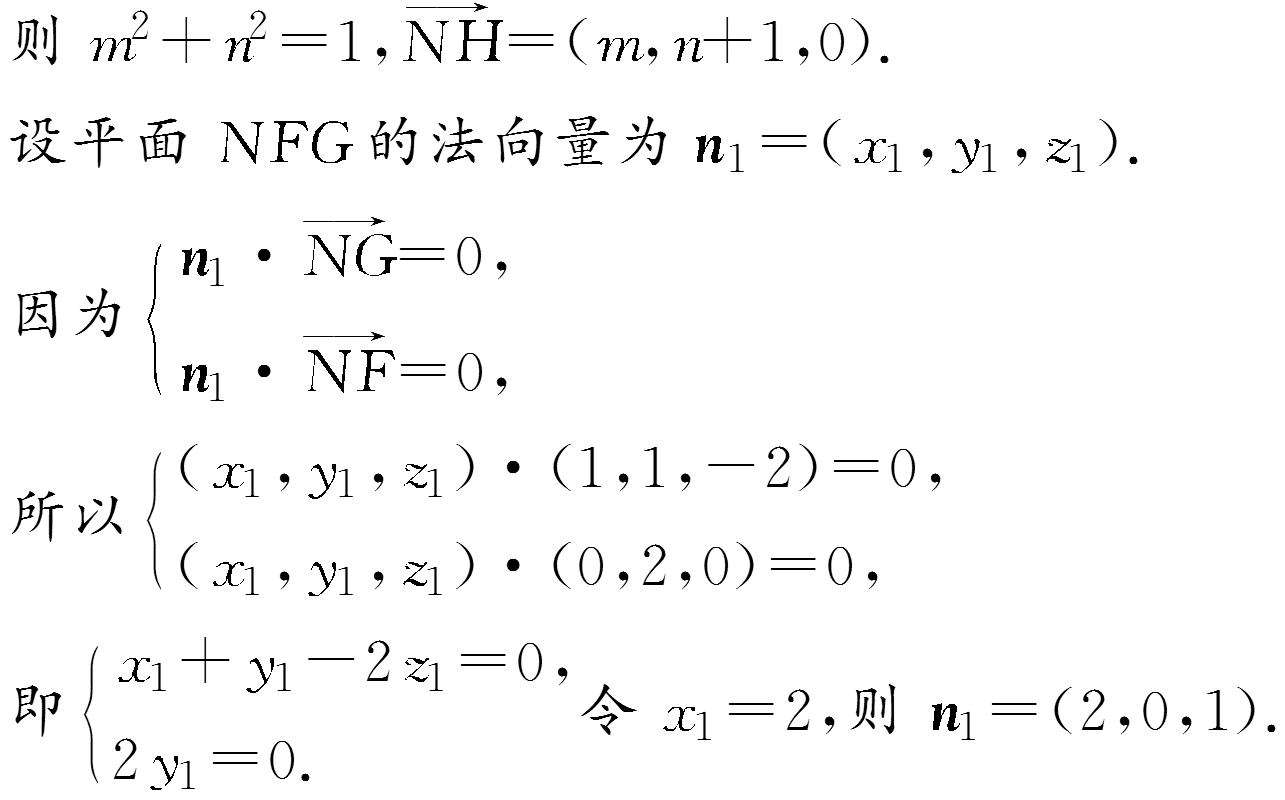
**(2)若直线*NH*与平面*NFG*所成线面角*α*的正弦值等于，求证：平面*NHG*与平面*MNFE*的夹角大于.**

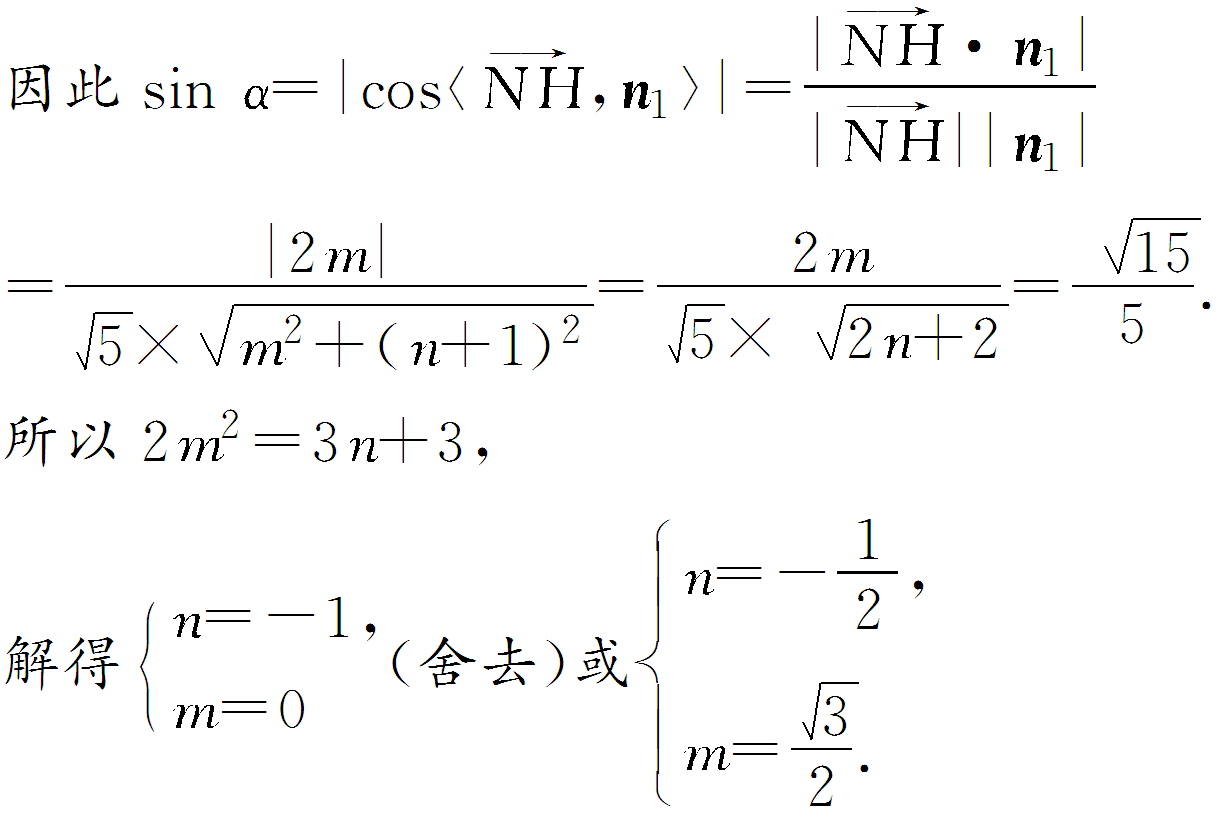
**[证明]　(1)因为平面*FNH*⊥平面*NHG*，平面*FNH*∩平面*NHG*＝*NH*，又*NH*⊥*FH*，*FH*⊂平面*FHN*，**

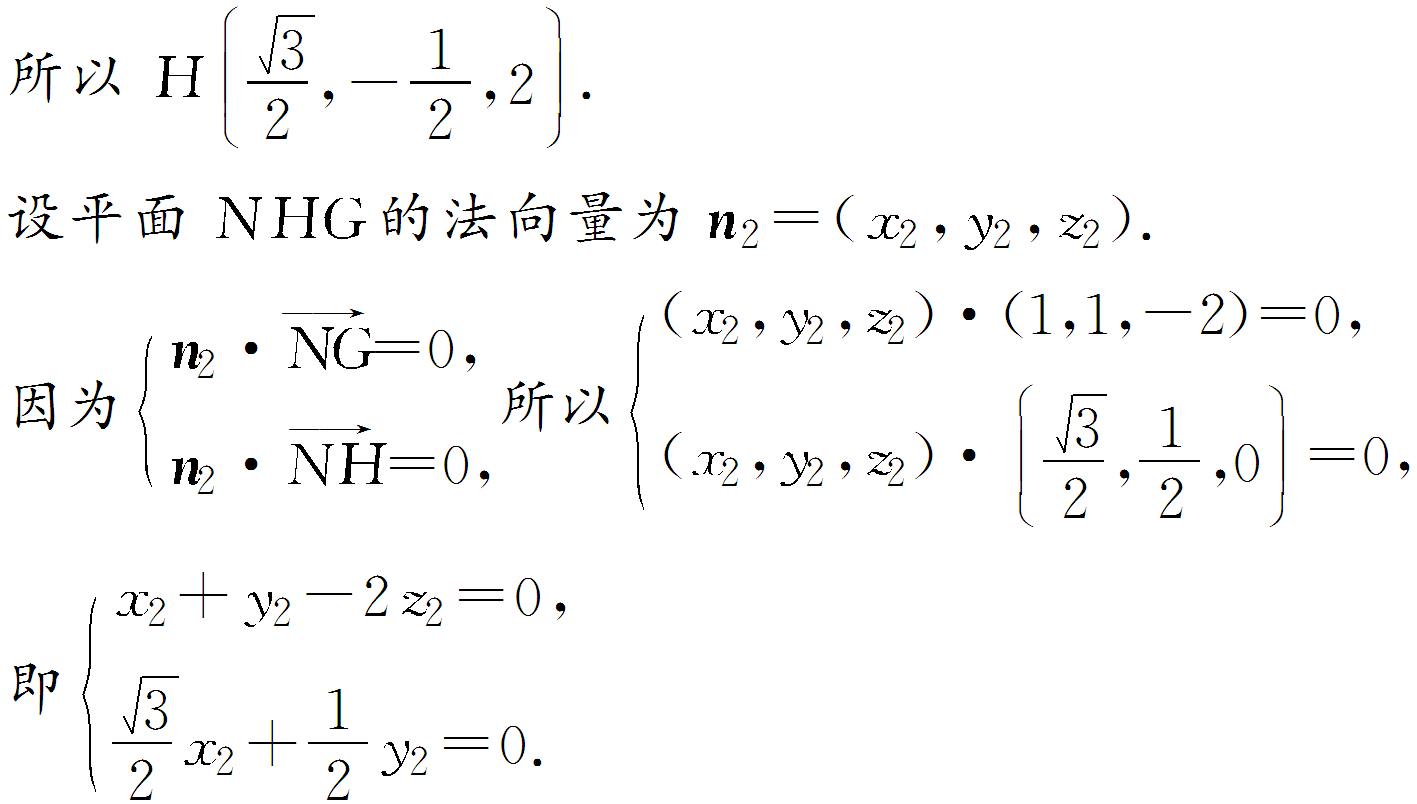
**所以*FH*⊥平面*NHG*，又*NG*⊂平面*NHG*，所以*FH*⊥*NG*.**

**(2)以点*O*2为坐标原点，分别以*O*2*G*，*O*2*E*，*O*2*O*1所在直线为*x*轴、*y*轴、*z*轴，建立如图所示的空间直角坐标系，****则*N*(0，－1,2)，*G*(1,0,0)，*F*(0,1,2)．**

**设*H*(*m*，*n,*2)(由图知*m*>0)，**



****

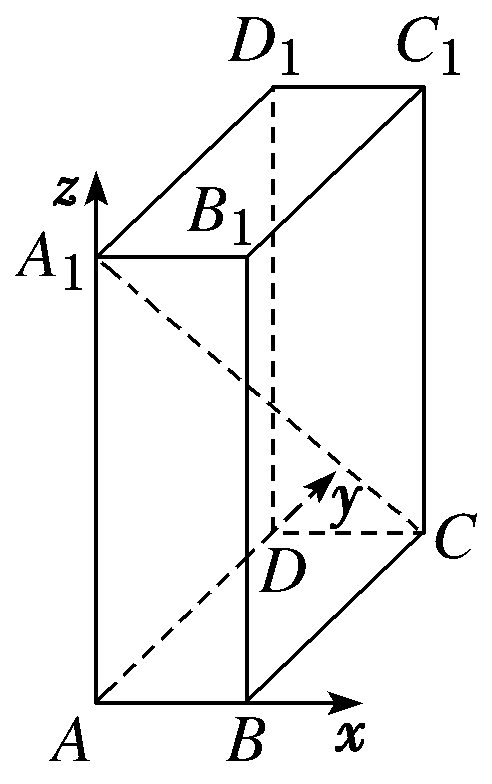
****

**令*x*2＝1，即*n*2＝.设平面*NHG*与平面*MNFE*的夹角为*θ*.**

**因为平面*MNFE*的一个法向量*n*3＝(1,0,0)，所以cos *θ*＝＝<，**

**所以平面*NHG*与平面*MNFE*的夹角大于.**

三、空间距离

1**.如图所示，在空间直角坐标系中有长方体*ABCD*­*A*1*B*1*C*1*D*1，*AB*＝1，*BC*＝2，*AA*1＝3，则点*B*到直线*A*1*C*的距离为(　　)**

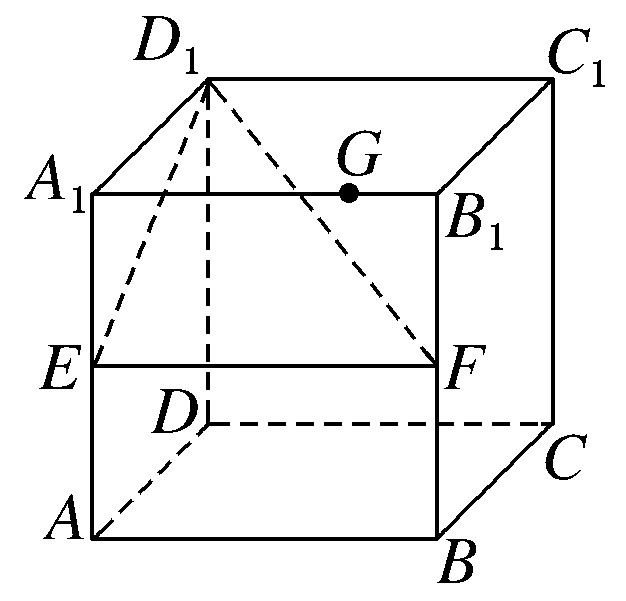
**A. B． C. D．1**

**解析：选B　过点*B*作*BE*⊥*A*1*C*，垂足为*E*，设点*E*的坐标为(*x*，*y*，*z*)，**

**由题意知*A*1(0,0,3)，*B*(1,0,0)，*C*(1,2,0)，故＝(1,2，－3)，＝(0,2,0)，**

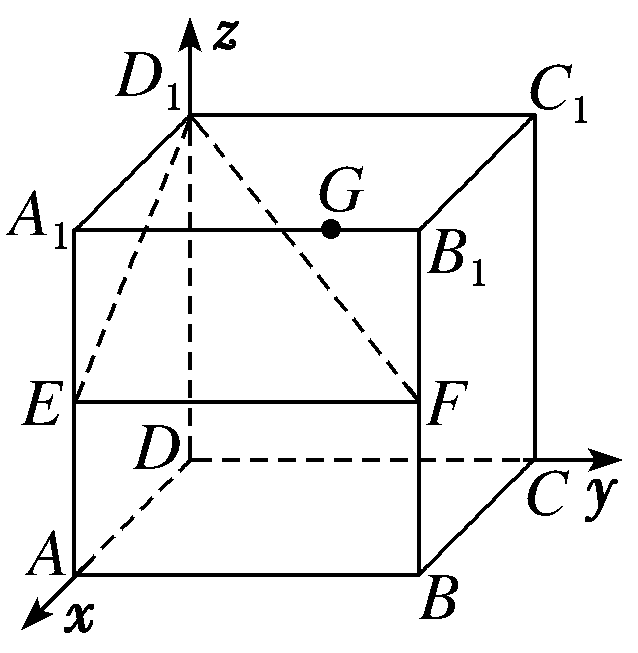
**对应的单位向量*u*＝，**

**所以点*B*到*A*1*C*的距离为＝ ＝.**

2**.在棱长为2的正方体*ABCD*­*A*1*B*1*C*1*D*1中，*E*，*F*分别为棱*AA*1，*BB*1的中点，*G*为棱*A*1*B*1上的一点，且*A*1*G*＝*λ*(0＜*λ*＜2)，则点*G*到平面*D*1*EF*的距离为(　　)**

**A．2 B． C. D．**

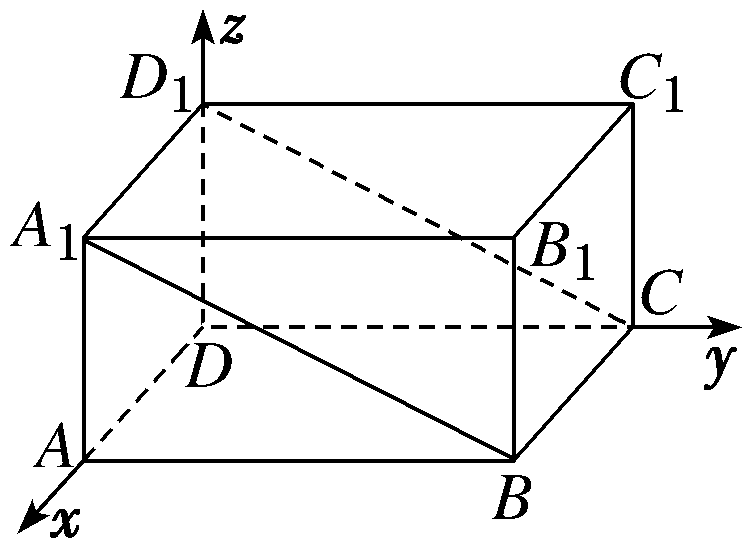
**解析：选D　以*D*为原点，，，的方向分别为*x*轴、*y*轴、*z*轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则*G*(2，*λ*，2)，*D*1(0,0,2)，*E*(2,0，1)，*F*(2,2,1)，因此＝(－2,0,1)，＝(0,2,0)，＝(0，*λ*，1)．**

**设平面*D*1*EF*的法向量为*n*＝(*x*，*y*，*z*)，则**

**令*x*＝1，得*n*＝(1,0,2)，则平面*D*1*EF*的一个法向量为(1,0,2)，**

**∴点*G*到平面*D*1*EF*的距离为＝＝.故选D.**

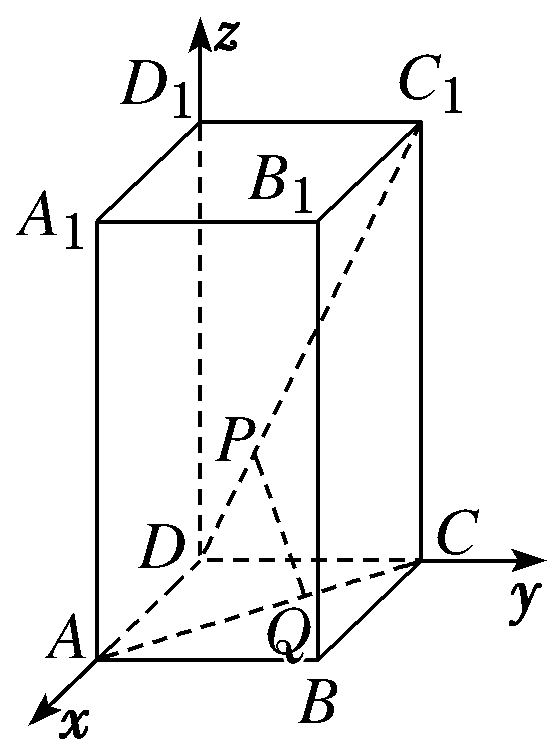
3**.如图，已知长方体*ABCD*­*A*1*B*1*C*1*D*1中，*A*1*A*＝5，*AB*＝12，则直线*B*1*C*1到平面*A*1*BCD*1的距离是(　　)**

**A．5 B．8 C. D．**

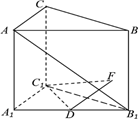
**解析：选C　以*D*为坐标原点，，，的方向分别为*x*，*y*，*z*轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，**

**则*C*(0,12,0)，*D*1(0,0,5)．设*B*(*x,*12,0)，*B*1(*x,*12,5)(*x*≠0)．设平面*A*1*BCD*1的法向量为*n*＝(*a*，*b*，*c*)，由*n*⊥，*n*⊥，得*n*·＝(*a*，*b*，*c*)·(－*x,*0,0)＝－*ax*＝0，*n*·＝(*a*，*b*，*c*)·(0，－12，5)＝－12*b*＋5*c*＝0，所以*a*＝0，*b*＝*c*，所以可取*n*＝(0,5,12)．又＝(0,0，－5)，所以点*B*1到平面*A*1*BCD*1的距离为＝. 因为*B*1*C*1∥平面*A*1*BCD*1，所以*B*1*C*1到平面*A*1*BCD*1的距离为.**

**4．在正四棱柱*ABCD*­*A*1*B*1*C*1*D*1中，*AA*1＝4，*AB*＝*BC*＝2，动点*P*，*Q*分别在线段*C*1*D*，*AC*上，则线段*PQ*长度的最小值是(　　)**

**A.　　 B． C.　　 D．**

**解析：选C　以*D*为坐标原点，*DA*，*DC*，*DD*1所在直线分别为*x*轴、*y*轴、*z*轴建立如图所示的空间直角坐标系，则*A*(2,0,0)，*C*(0,2,0)，*C*1(0,2,4)，则可设*P*(0，*t,*2*t*)，*t*∈[0,2]，*Q*(2－*m*，*m,*0)，*m*∈[0,2]，∴*PQ*＝＝，当且仅当5*t*＝*m*＝时，*PQ*取得最小值，故选C.**

5.如图，直三棱柱中，侧棱长为2，，，点*D*是的中点，*F*是侧面含边界上的动点要使平面，则线段的长的最大值为

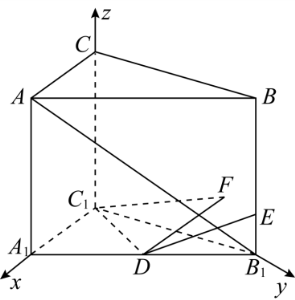
A. B. C. D.

【答案】*A*

【分析】本题考查线段长的最大值的求法，考查利用空间向量证明线线垂直，考查运算求解能力，属于拔高题．取上靠近的四等分点为*E*，连接*DE*，当点*F*在*DE*上时，平面，以为原点，为*x*轴，为*y*轴，为*z*轴，建立空间直角坐标系，利用向量法即可证明，由此可证平面，即可得解．

解：取上靠近的四等分点为*E*，连接*DE*，当点*F*在*DE*上时，平面，

证明如下：因为直三棱柱中，

侧棱长为2，，，点*D*是的中点，

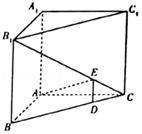
所以平面，所以．

以为坐标原点，，，分别为*x*轴，*y*轴，*z*轴建立空间直角坐标系，所以0，，1，，，1，，即1，，，此时，即．

又，*DE*，平面，所以平面，

故当*F*在*DE*上时，平面，很明显，当*E*，*F*重合时，线段最长，此时．故选*A*．

**四、综合题**

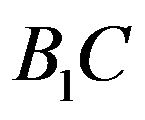
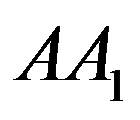
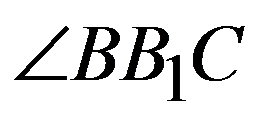
1.如图，在直三棱柱中，，，点*D*，*E*分别是线段*BC*，上的动点不含端点，且则下列说法正确的是

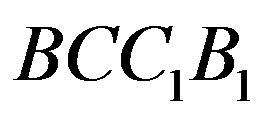
A. 平面；B. 该三棱柱的外接球的表面积为

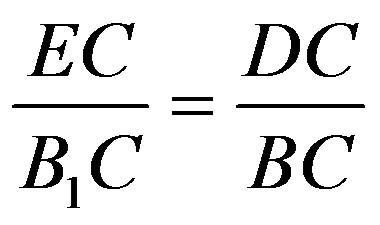
C. 异面直线与所成角的正切值为；D. 二面角的余弦值为

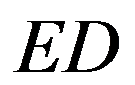
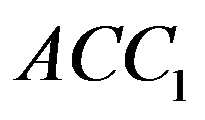
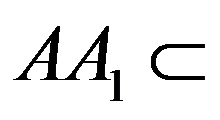
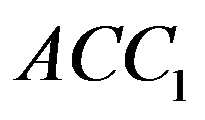
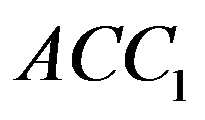
【答案】*AD*

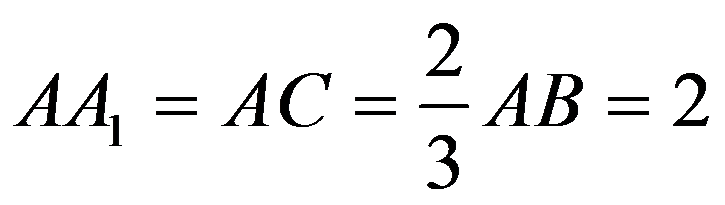
【分析】本题考查线面平行的判定、球的表面积、异面直线所成角，利用空间向量求二面角，属于较难题．

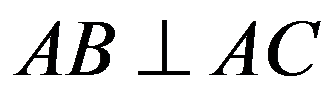
根据题意得到，利用平行的判定*A*选项；确定三棱柱外接球的直径，再计算球的的表面积即可判定*B*选项；确定异面直线与所成角为，再计算正切值即可判定*C*选项；建立空间直角坐标系，利用空间向量求二面角的余弦值即可．

解：在直三棱柱中，四边形是矩形，

因为，所以，

因为不在平面内，平面，所以平面，*A*项正确；

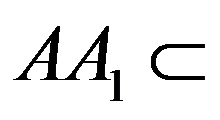
因为，所以，

因为，所以，所以，

连接，，设其交点为*O*，连接*OA*，，，，

由直棱柱的性质知平行四边形是矩形，

，

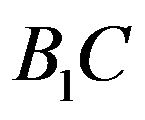
又平面*ABC*，平面，则平面平面，

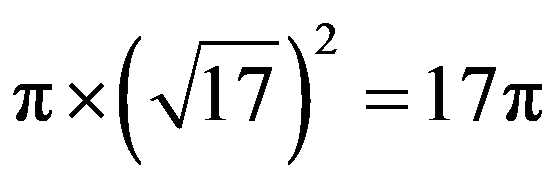
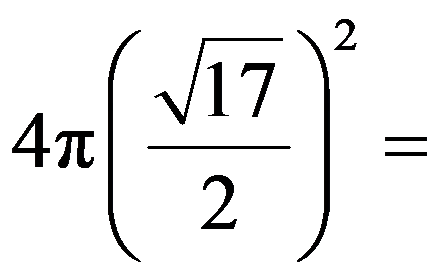
又平面平面，，则平面，

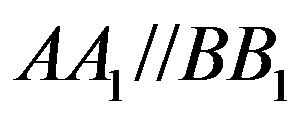
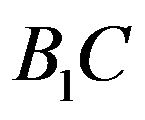
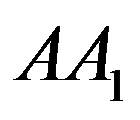
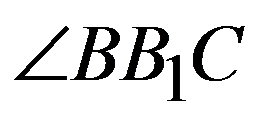
又平面，则，则是直角三角形，又*O*为的中点，则，

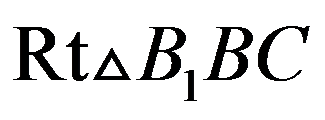
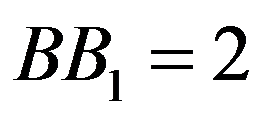
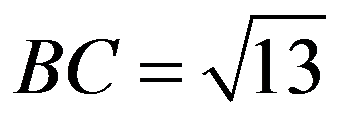
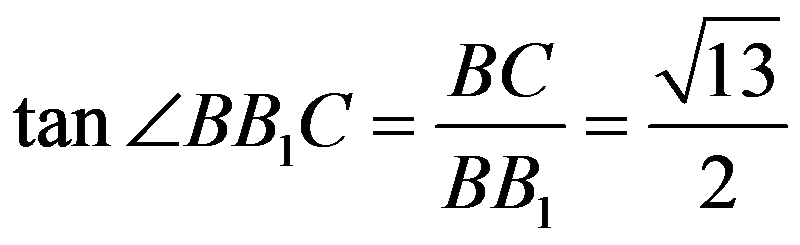
同理，在直角三角形中，，

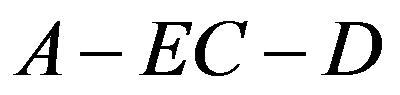
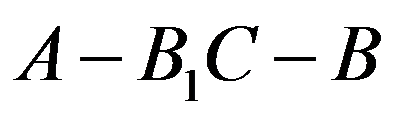
综上所述，，则*O*为直三棱柱外接球的球心，

则是三棱柱外接球的直径，

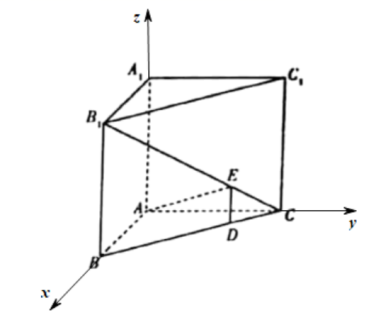
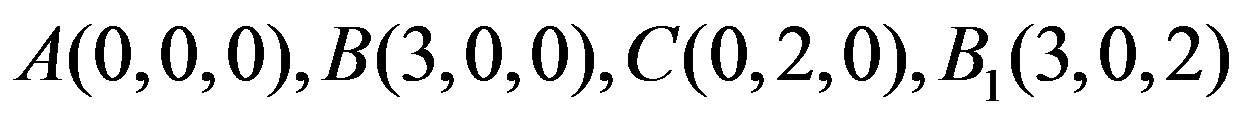
所以三棱柱外接球的表面积为，所以*B*项错误；

因为，所以异面直线与所成角为．

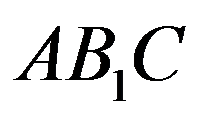
在中，，，所以，所以*C*项错误；

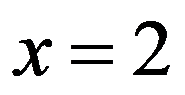
二面角即二面角，

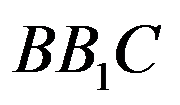
以*A*为坐标原点，以，，的方向分别为*x*，*y*，*z*轴的正方向建立空间直角坐标系，

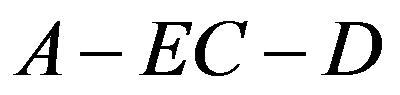
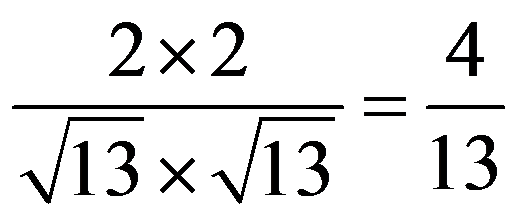
如图，则，

，，，

设平面的法向量，，即

令可得；

设平面的一个法向量为，则，即

令可得，故二面角的余弦值为，所以*D*项正确．

故选*AD*．

2.在正方体中，，*E*，*F*分别为的中点，*P*是上的动点，则    

A. 平面

B. 平面截正方体的截面面积为18

C. 三棱锥的体积与*P*点的位置有关

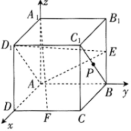
D. 过*AE*作正方体的外接球的截面，所得截面圆的面积的最小值为

【答案】*AB*

【分析】本题考查了线面垂直的判定，棱锥的体积计算，棱柱与球的位置关，立体几何中的界面问题和空间向量法的应用，综合性较强．

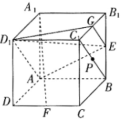
建立空间坐标系，利用向量数量积判断和、*AE*是否垂直判断*A*，做出截面梯形，计算面积判断*B*，根据平面判断*C*；设外接球的球心为*O*，过*O*作，垂足为，则为圆心，为半径的圆是过*AE*面积最小的截面圆，求出其面积判断*D*．

解：对于*A*，以*A*为坐标原点建立空间坐标系，如图所示：



，则0，，4，，2，

，，

，，又，、平面，

平面，故*A*正确

对于*B*，如图取是我中点为*G*，连接，*GE*，则且，

可知 ，，，，*G*，*E*共面，

则等腰梯形即为截面，

由勾股定理可求得，，，

截面梯形的高为，

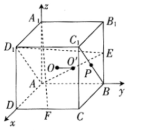
截面梯形的面积为，故*B*正确

对于*C*，在正方体中，， 平面， 平面，

平面，是 上的动点，

到平面的距离为定值，

故三棱锥的体积与*P*点位置无关，故*C*错误

对于*D*，设外接球的球心为*O*，过*O*作，垂足为，

则为圆心，为半径的圆是过*AE*面积最小的截面圆，

则2，，设，，4，，

，解得，则

故截面圆的最小面积为 ，故*D*错误．故选：*AB*．

3.已知正方体棱长为2，如图，*M*为上的动点，平面下面说法正确的是

A. 直线*AB*与平面所成角的正弦值范围为

B. 点*M*与点重合时，平面截正方体所得的截面，其面积越大，周长就越大

C. 点*M*为的中点时，若平面经过点*B*，则平面截正方体所得截面图形是等腰梯形

D. 己知*N*为中点，当的和最小时，*M*为的中点

【答案】*AC*

【分析】本题为立体几何综合题，属于拔高题．

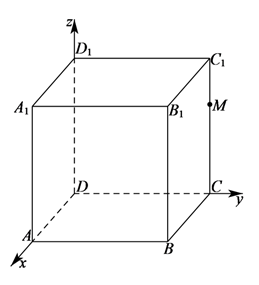
对于*A*，建立空间直角坐标系，设点，求出，从而即可求解．

对于*B*，当*M* 与重合时，连接、*BD* 、、*AC*，结合线面垂直的性质定理得到平面，是边长为的等边三角形，即可求解其面积和周长，设*E* 、*F* 、*Q* 、*N* 、*G* 、*H* 分别为棱、、、*BC* 、*CD* 、的中点，易知六边形*EFQNGH* 是边长为的正六边形，且平面EFQNGH{ \rm{ / } }{ \rm{ / } } 平面，求得六边形*EFQNGH* 的面积和周长，进行比较即可得出结论．

对于*C*，设平面交棱于点，由解得*b*，得到点*E* 为棱的中点，点*F* 为棱的中点，从而空间中两点间的距离公式即可求解．

对于*D*，将矩形与矩形延展为一个平面即可推导求解．

解：对于*A*选项，以点*D*为坐标原点，*DA* 、*DC* 、所在直线分别为*x* 、*y* 、*z*轴建立空间直角坐标系，则点、、设点，



平面，则为平面的一个法向量，且，，

，

所以，直线*AB* 与平面所成角的正弦值范围为，故*A*选项正确；

对于*B*选项，当*M* 与重合时，连接、*BD* 、、*AC*，

在正方体中，平面*ABCD* ，

平面*ABCD* ，，

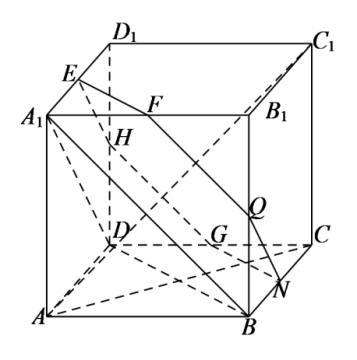
四边形*ABCD* 是正方形，则，

，平面，平面，

平面，，同理可证：，

，平面，平面，

易知是边长为的等边三角形，其面积为，

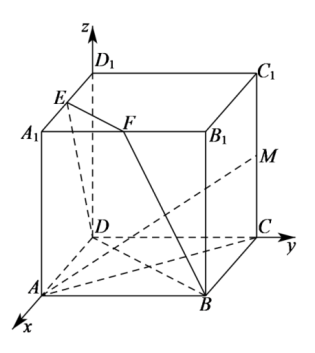
周长为．

设*E* 、*F* 、*Q* 、*N* 、*G* 、*H* 分别为棱、、、*BC* 、*CD* 、的中点，

易知六边形*EFQNGH* 是边长为的正六边形，且平面EFQNGH{ \rm{ / } }{ \rm{ / } } 平面，

正六边形*EFQNGH* 的周长为，面积为，

则的面积小于正六边形*EFQNGH* 的面积，它们的周长相等，*B*选项错误；

对于*C*选项，设平面交棱于点，点，，

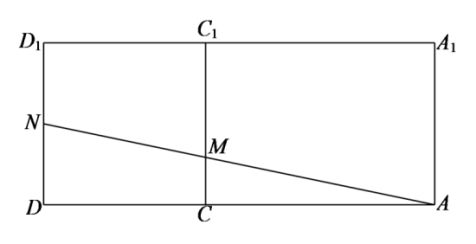
平面，平面，，即，得，

，所以，点*E* 为棱的中点，

同理可知，点*F* 为棱的中点，则，，而，

，∴EF{ \rm{ / } }{ \rm{ / } }DB 且，

由空间中两点间的距离公式可得，

，，

所以，四边形*BDEF* 为等腰梯形，*C*选项正确；

对于*D*选项，将矩形与矩形延展为一个平面，如下图所示：

若最短，则*A* 、*M* 、*N* 三点共线，

\because CC_{ 1 } { \rm{ / } }{ \rm{ / } }DD_{ 1 } ，，

，所以，点*M*不是棱的中点，*D*选项错误．故选*AC*．

4.在棱长固定的正方体中，点*E*，*F*分别满足，，，则

A. 当时，三棱锥的体积为定值；B. 当时，存在使得*B*平面*EF*

C. 当时，点*A，B*到平面*EF*的距离相等；D. 当时，总有*FE*

【答案】*ACD*

本题考查了空间垂直、平行关系，点、线、面间的距离计算、空间向量的应用，属于中档题．

*A*、当时，三棱锥的体积等于三棱锥的体积，因为面，所以*E*到面的距离为定值，可得三棱锥的体积为定值；

*B*、当时，利用不可能有即可判断；

*C*、当时，*E*为线段*AB*的中点，即可判断；

*D*、以*D*为原点，*DA*、*DC*、所在直线分别为*x*轴、*y*轴、*z*轴建立空间直角坐标系，只需证明，可得；

【解答】

解：对于*A*，当时，三棱锥的体积等于三棱锥的体积，因为面，所以*E*到面的距离为定值，可得三棱锥的体积为定值，故*A*正确；

对于*B*，当时，*F*为*BC*的中点，在正方体中，易得平面，

平面，则，所以不可能有，则不存在使得平面，故*B*错；

对于*C*，当时，*E*为线段*AB*的中点，则点*A*，*B*到平面的距离相等，故*C*正确；

对于*D*，以*D*为原点，*DA*、*DC*、所在直线分别为*x*轴、*y*轴、*z*轴建立空间直角坐标系，

则0，，1，，设，则*m*，，1，，

从而1，，，

，，故*D*正确；

故选：*ACD*．

A1

C1

B1

M

C

N

B

A

P

**【利用空间向量解决探索性问题】**

5.如图，已知三棱柱ABC－A1B1C1的侧棱与底面垂直，AA1＝AB＝AC＝1，AB⊥AC，M、N分别是CC1，BC的中点，点P在直线A1B1上，且

（1）证明：无论入取何值，总有AM⊥PN；

（2）当入取何值时，直线PN与平面ABC所成的角θ最大？

并求该角取最大值时的正切值。

（3）是否存在点P，使得平面PMN与平面ABC所成的二面

角为30º，若存在，试确定点P的位置，若不存在，请说明理由。

A1

C1

B1

M

B

A

P

*x*

*y*

*z*

**解：如图，以A为原点建立空间直角坐标系，则A1（0，0，1），**

**B1（1，0，1）， M（0，1，），N（，0）**

**，，**

****

C

**（1）∵，∴**

N

**∴无论取何值，AM⊥PN**

**（2）∵（0，0，1）是平面ABC的一个法向量。**

**∴sinθ=|cos<|=**

**∴当＝时，θ取得最大值，此时sinθ=,cosθ=,tanθ=2**

**答：当＝时，θ取得最大值，此时tanθ=2**

**（3）设存在，，设是平面PMN的一个法向量。**

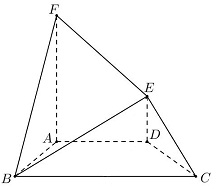
**则得令x=3，得y=1+2,z=2-2**

**∴**

**∴|cos<>|=化简得4**

**∵△＝100-4413＝-108<0；∴方程（\*）无解**

**∴不存在点P使得平面PMN与平面ABC所成的二面角为30º**

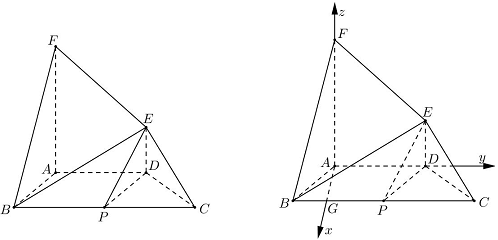
**【立体几何中的作图问题】**

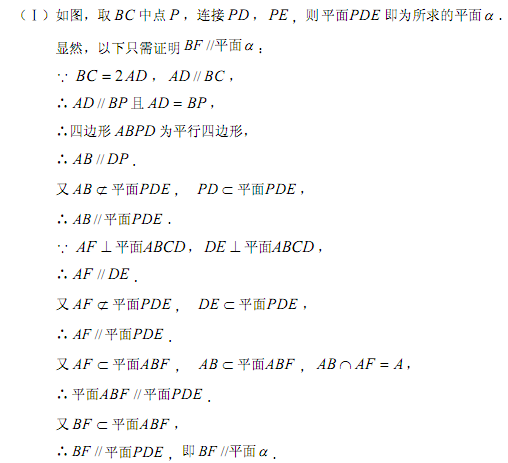
6.如图，在以为顶点的多面体中，

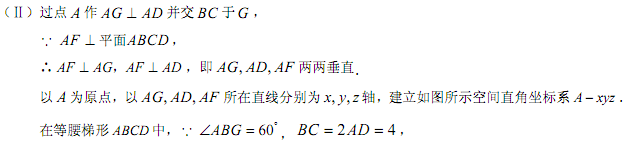
，, ∥， ，

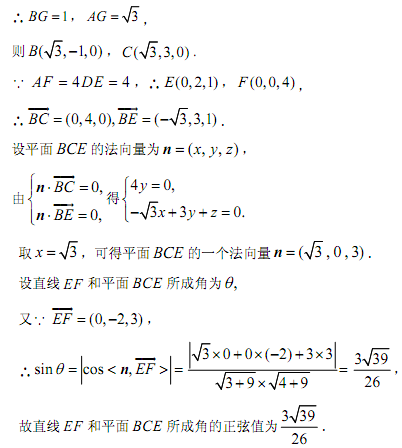
，．

（Ⅰ）请在图中作出平面，使得，且∥，并说明理由；

（Ⅱ）求直线和平面所成角的正弦值.







【**翻折问题（平面-立体）、最值问题**】

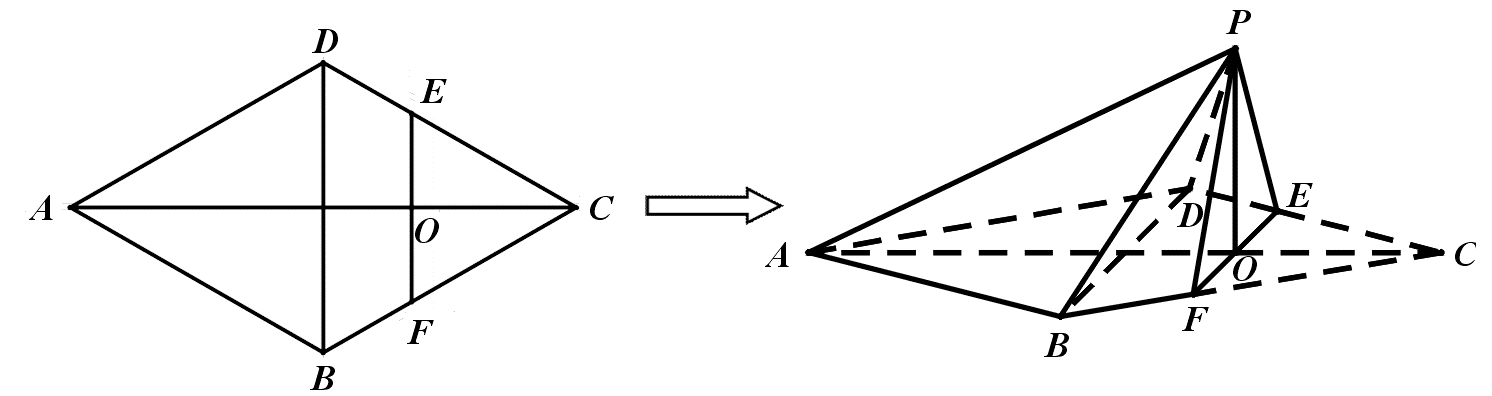
7．如图，在边长为4的菱形中，．点分别在边上，点与点、不重合，，．沿将△翻折到△的位置，使平面⊥平面．

（Ⅰ）求证：平面；

（Ⅱ）当取得最小值时，请解答以下问题：

（ⅰ）求四棱锥的体积；

（ⅱ）若点满足，试探究：直线与平面所成角的大小是否一定大于？并说明你的理由．

****

**（Ⅰ）证明：∵　菱形的对角线互相垂直，∴，∴，**

**∵ ，∴．**

**∵　平面⊥平面，平面平面，且平面，**

**∴　平面, ∵ 平面，∴　.**

**∵ ，∴　平面.**

**（Ⅱ）如图，以为原点，建立空间直角坐标系.**

**（ⅰ）设 因为，所以为等边三角形，**

**故，.又设，则，.**

**所以，，，故 ，**

**所以，**

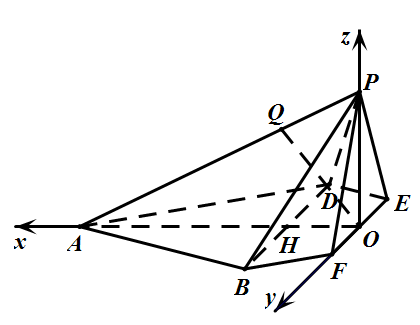
**当时，. 此时，**

**由（Ⅰ）知，平面**

**所以.**

**（ⅱ）设点的坐标为，**

**由（i）知，，则，，，.**

**所以，，**

**∵，**

**∴． ∴， ∴．**

**设平面的法向量为，则．**

**∵，，∴　，**

**取，解得：， 所以.**

**设直线与平面所成的角，**

**∴**

**．**

**又∵∴．∵，∴．**

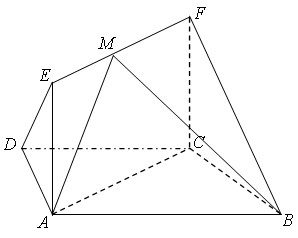
**因此直线与平面所成的角大于，即结论成立．**

**【动点、取值范围】**

**8.如图，学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！在梯形中，，，四边形为矩形，平面平面，.**

**（I）求证：平面；**

**（II）点在线段上运动，设平面与平面所成二面角的平面角为，试求的取值范围.**

**（I）证明：在梯形中，**

**∵ ,，**

**∠＝，∴ **

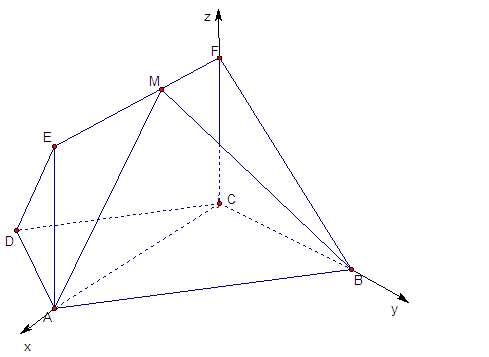
**∴ **

**∴  ∴　⊥**

**∵ 平面⊥平面,平面∩平面,平面**

**∴ ⊥平面 …………………6分**

**（II）学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！解法一：由（I）可建立分别以直线为的如图所示空间直角坐标系，令，则，**

**∴  …………8分**

**设为平面MAB的一个法向量，**

**由得**

**取，则，…………10分**

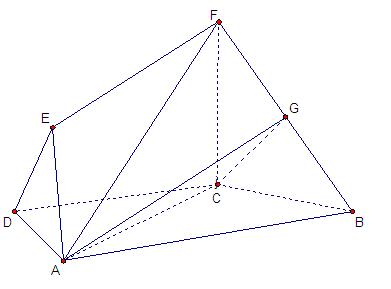
**∵　是平面FCB的一个法向量**

**∴　………12分**

**∵  ∴　当时，有最学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！小值，**

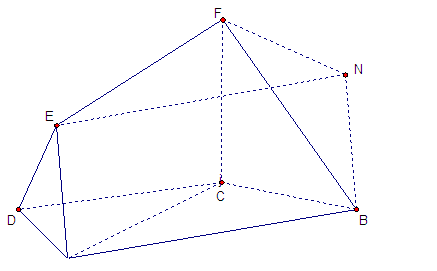
**当时，有最大值。 ∴ …………………14分**

**解法二：①当与重合时，取中点为，连结**

** ∵ ,∴  ∴⊥**

**∵　 ∴ ⊥ ∴ ∠=**

**∵ ⊥ ∴  ∴,**

** ∴ **

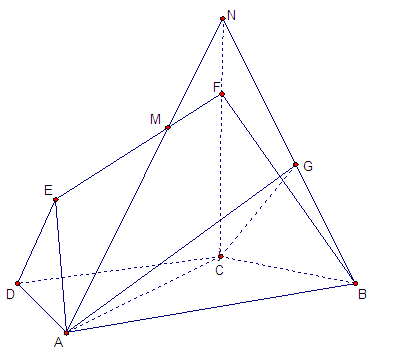
**②当与重合时，过,**

**连结，则平面∩平面＝,**

**∵ ⊥，又∵⊥∴ ⊥平面**

**∴ ⊥平面∴　∠＝**

**∴　=,∴　=**

**③当与都不重合时，令**

**延长交的延长线于,连结**

**∴　在平面与平面的交线上**

**∵ 在平面与平面的交线上 ∴ 平面∩平面＝**

**过C作CG⊥NB交NB于G ，连结AG，由（I）知，⊥, 又∵AC⊥CN,**

**∴　AC⊥平面学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！NCB ∴ AC⊥NB,　又∵　CG⊥NB，AC∩CG=C，**

**∴　NB⊥平面ACG ∴AG⊥NB ∴ ∠AGC=**

**在中，可求得NC＝，**

**从而，在中，可求得CG＝**

**∵　∠ACG＝ ∴　　AG＝**

**∴ **

**∵  ∴ **

**综合①②③得，**